# ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания по выполнению
расчетно-графической работы

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой курса «Строительная механика» и предназначены для студентов строительных специальностей.

Приведенный материал может быть использован для выполнения студентами соответствующей расчетно-графической работы, а также инженерами, работающими в области расчета стержневых систем.

## СОДЕРЖАНИЕ

# 1. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Приведены основные понятия, определения и системы уравнений метода сил свободных и вынужденных колебаний плоской рамы.

## 1.1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Упругая система, выведенная из состояния равновесия в результате взаимодействия с каким-либо другим физическим телом, совершает свободные (собственные) колебания после прекращения указанного взаимодействия.

Под ***степенью свободы*** упругой системы понимается количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех масс системы в пространстве, т.е. число возможных форм свободных колебаний упругой системы равно числу степеней ее свободы. Каждой форме колебаний соответствует своя частота. Совокупность частот системы составляет ее ***спектр частот***.

Наибольшую опасность, в связи с возможностью возникновения резонанса при вынужденных колебаниях, представляет наименьшая частота, т.к. резонанс на низшей частоте приводит к наибольшему динамическому эффекту. Поэтому низшую частоту называют частотой основного тона собственных колебаний. Следующую по порядку частоту называют первым обертоном и т.д.

Упругая система с двумя точечными массами $m_1$ и $m_2$ и с двумя линейными степенями свободы, очевидно, характеризуется двумя частотами свободных колебаний $\varphi_1$ и $\varphi_2$ . Для определения частот методом сил можно составить следующие выражения перемещения точек приложения масс под действием сил инерции этих масс [ 1 ], [ 2 ]:

$$\begin{cases} y_1 = -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2, \\ y_2 = -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2. \end{cases} \tag{1. 1}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений позволяет получить следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (\delta_{11} m_1 - 1/\varphi^2) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 = 0, \\ \delta_{21} m_1 A_1 + (\delta_{22} m_2 - 1/\varphi^2) A_2. \end{cases} \tag{1. 2}$$

Перемещения от единичных сил, приложенных в сечениях, где находятся массы, т.е. в местах действия сил инерции, $\delta_{11} \div \delta_{22}$ определяются обычным способом метода сил.

Тривиальное решение системы уравнений (1.2) $A_1 = A_2 = 0$ соответствует случаю, когда система находится в покое.

Отличные от нуля значения амплитуд $A_1$ и $A_2$ в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений равен нулю, т.е.

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - 1/\varphi^2 & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_{22} - 1/\varphi^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.\ 3)$$

Уравнение частот, полученное в результате раскрытия определителя второго порядка, представляет собой биквадратное уравнение, решение которого и определяет частоты свободных колебаний (корни векового уравнения).

### *1.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ*

При расчете упругой системы на вынужденные колебания определяются амплитудные значения внутренних силовых факторов и напряжений, а также выполняется проверка системы на резонанс.

Если возмущающие силы, действующие на упругую систему, имеют одну и ту же частоту $\omega$ и изменяются в одной фазе, то силы инерции и, очевидно, внутренние силовые факторы достигают наибольших значений в одно и то же время.

Для проверки на резонанс достаточно определить частоту основного тона свободных колебаний $\varphi_1$. В этом случае частота вынужденных колебаний, как правило, принимается равной $\omega = 0{,}8\ \varphi_1$ при которой и выполняется проверка на резонанс.

Перемещение любой массы $m_i$ в произвольный момент времени $t$ выражается следующим образом:

$$y_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \ldots + \delta_{ii}x_i + \ldots + \delta_{in}x_n + \Delta_{ip}, \quad (1.4)$$

где $x_1 \div x_n$ - силы инерции соответствующих масс;

$\delta_{i1} \div \delta_{in}$ - перемещения по направлению силы $x_i$, вызванные единичными силами $x_1 \div x_n$, приложенными в точках расположения соответствующих масс;

$\Delta_{ip}$ - перемещение точки $i$ от амплитудных значений вибрационной нагрузки.

При гармонических вынужденных колебаниях с частотой $\omega$ выражение для силы инерции массы $m_i$ может быть представлено в виде

$$x_i = m_i y_i \omega^2. \quad (1.\ 5)$$

Тогда перемещение массы $m_i$ будет

$$y_i = x_i / m_i\omega^2. \quad (1.\ 6)$$

Подставив (1.6) в уравнение (1.4), получим

$$\delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \ldots + \delta_{ii}^* x_i + \ldots + \delta_{in}x_n = 0,$$

где

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - 1/\, m_i\omega^2. \tag{1.7}$$

Аналогично составляются и другие уравнения. В связи с этим, для упругой системы с двумя степенями свободы уравнения совместности деформаций будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}^* x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}^* x_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \tag{1. 8}$$

Решение системы (1.8) определяет амплитудные значения сил инерции масс по значениям которых строится эпюра динамических изгибающих моментов путем сложения единичных эпюр, предварительно умноженных на найденные значения соответствующих инерционных сил, с эпюрой от нагрузки, т.е.

$$M_\partial = \overline{M}_1 x_1 + \overline{M}_2 x_2 + M_p. \tag{1. 9}$$

Эпюры поперечных и продольных сил строятся обычными способами по эпюре моментов.

## 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА

Рассматриваются основные этапы расчета на свободные и вынужденные колебания плоской рамы методом сил.

### *2.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ*

При динамическом расчете упругой системы не будем учитывать колебания масс, связанные с продольными деформациями стержней, а также будем рассматривать массы как точечные и, следовательно, положение масс не будет определяться их углами поворотов. Таким образом, учитываются только колебания масс, связанные с изгибом стержней (упругие деформации изгиба стержней).

Для определения числа степеней свободы масс упругой системы необходимо представить перемещения каждой массы вдоль и поперек оси стержня, на котором расположена данная масса. Если возможное перемещение массы вызывает изгиб какого-либо стержня упругой системы, то данная масса обладает степенью свободы по направлению этого перемещения.

Далее определяется статическая и кинематическая неопределимость задачи по известным зависимостям статики сооружений.

На рис. 1.1 представлены варианты плоских рам с выполненным кинематическим анализом.

### *2.2. ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ОТ ЕДИНИЧНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ МАСС*

Эпюры изгибающих моментов строятся для заданной системы от безразмерных единичных сил инерции масс, приложенных по направлениям степеней свободы каждой массы. Очевидно, число этих единичных эпюр равно числу степеней свободы масс упругой системы.

Если упругая система статически (кинематически) неопределима, то необходимо раскрыть неопределимость задачи методом сил или методом перемещений. Трудоемкость решения задачи методом сил и методом перемещений примерно равна при $Л = n$.

### *2.3. ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ*

Для формирования системы уравнений свободных колебаний (1. 3) необходимо вычислить единичные перемещения (податливости) путем "перемножения" соответствующих вспомогательных эпюр изгибающих моментов по правилу Верещагина.

Система уравнений представляет собой систему линейных однородных уравнений. Если порядок системы уравнений больше трех, то решать такую систему необходимо нахождением собственных значений матрицы $Д$. При порядке системы ($Wq \leq 3$) уравнение частот (вековое уравнение) может быть решено строго непосредственно. При этом раскрывают определитель по известному способу Саррюса.

В результате решения системы уравнений определяются частоты собственных колебаний, т.е. выполнен расчет задачи на свободные колебания.

### *2.4. ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА ОТ АМПЛИТУДНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ*

Эпюра изгибающего момента от амплитудных значений вибрационной нагрузки (грузовая эпюра) строится для заданной системы.

Возмущающие силы (вибрационная нагрузка) приложены к массам упругой системы и по направлению их степеней свободы. На основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией грузовая эпюра строится путем алгебраического сложения единичных эпюр изгибающих моментов, увеличенных на амплитудные значения возмущающих сил.

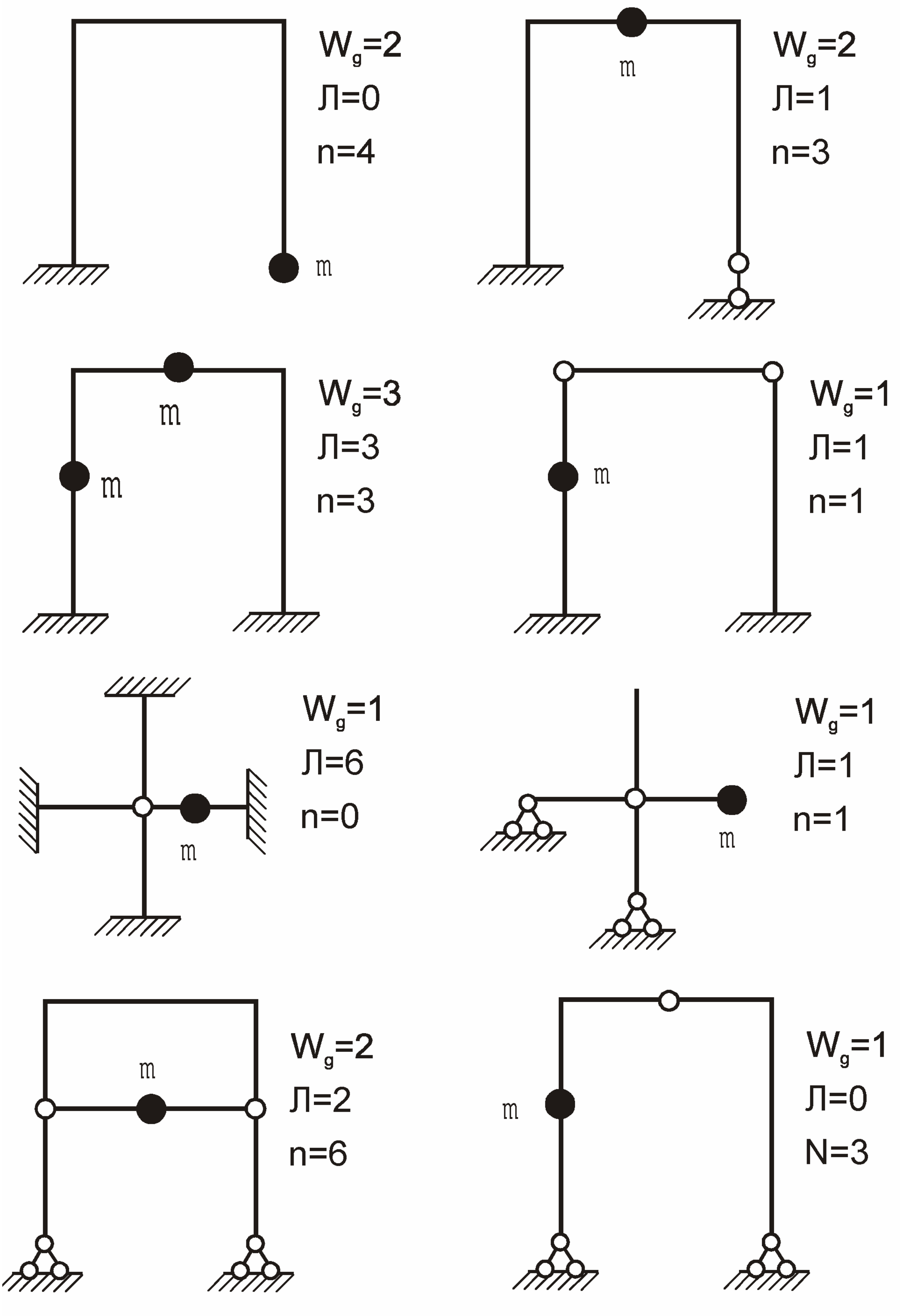


Рис. 1.1. Примеры кинематического анализа вариантов рам

### *2.5. ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ*

Для формирования системы уравнений вынужденных колебаний (1.8) необходимо вычислить перемещения от амплитудных значений возмущающих сил путем “перемножения” грузовой эпюры на единичные эпюры изгибающих моментов для заданной системы. Остальные коэффициенты определены при расчете на свободные колебания.

Система уравнений представляет собой систему линейных неоднородных уравнений. Решение уравнений рекомендуется выполнять методом исключений Гаусса. В результате решения определяются амплитудные значения сил инерции масс.

### *2.6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ*

На основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией можно записать следующее выражение для построения эпюры изгибающего момента $M_д$ от действия вибрационной нагрузки

$$M_д = \overline{M}_1 x_1 + \overline{M}_2 x_2 + \ldots + \overline{M}_n x_1 + M_p,$$

где $\overline{M}_1 \div \overline{M}_n$ - эпюры изгибающих моментов от действия сил инерции масс, равных единице,

$x_1 \div x_n$ - амплитудные значения сил инерции масс,

*Mp* - эпюра изгибающего момента от действия амплитудных значений возмущающих сил,

*n* - число степеней свободы масс упругой системы.

Эпюра поперечной силы строится по известным приемам дифференцирования эпюры изгибающего момента, а эпюра продольной силы, в свою очередь, строится по эпюре поперечных сил путем поочередного вырезания узлов и составления уравнений равновесия.

### *2.7. СТАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА*

Необходимым условием контроля решения задачи является статическая проверка: равенство нулю суммы амплитудных значений вибрационной нагрузки, амплитудных значений сил инерции масс и реакций опор, т.е. $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$.

## 3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Приведен пример выполнения расчетно-графической работы.

*Выполнить динамический расчет рамы (рис. 3.1, а) на собственные и вынужденные колебания. Частоту возмущающих сил принять равной* $\omega = 0{,}8\varphi_1$

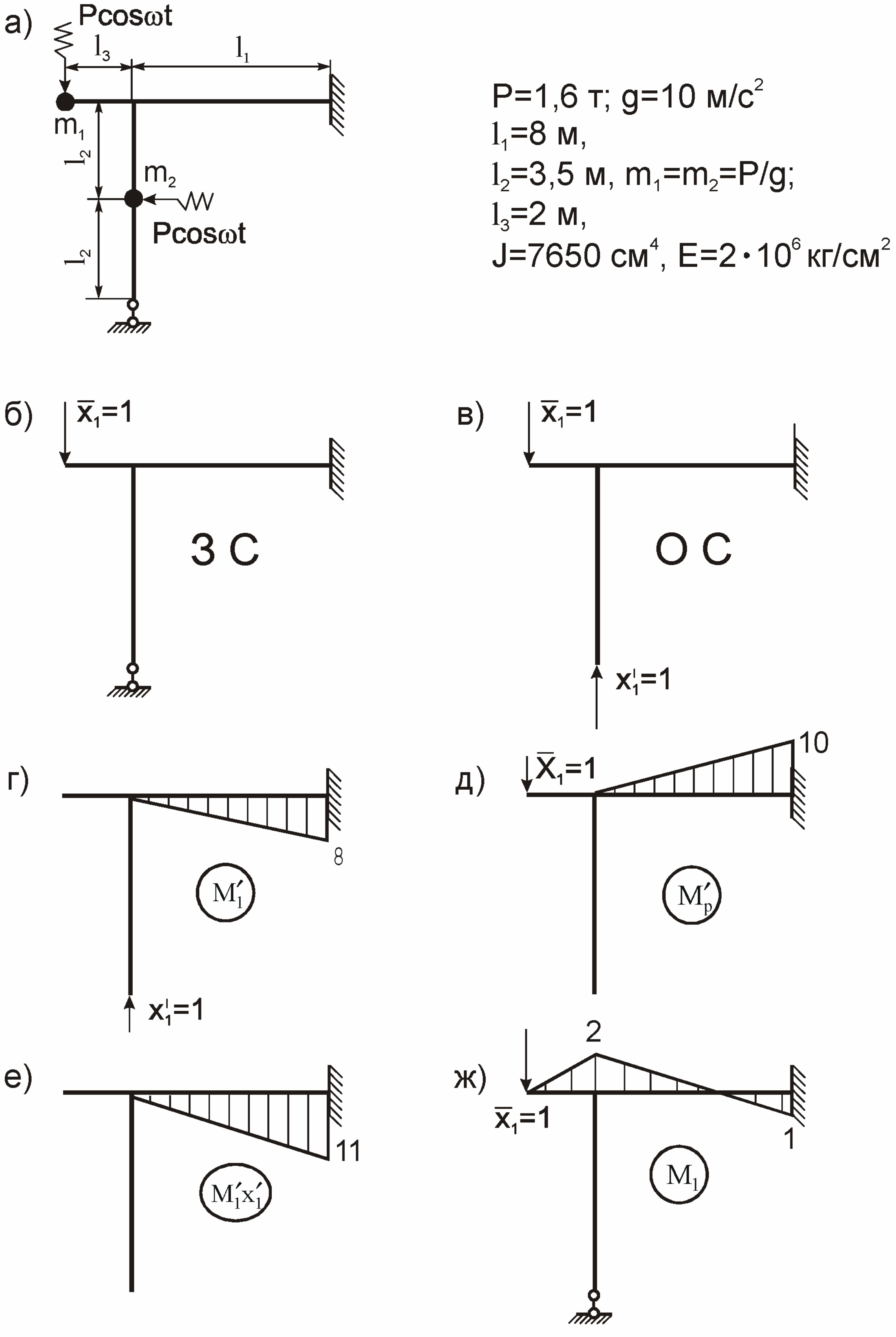


Рис. 3.1. Вспомогательные эпюры от действия силы инерции $X_1 = 1$ массы $m_1$

*1. Кинематический анализ.*

Массы рамы имеют две степени свободы: вертикальную массы $m_1$ и горизонтальную массы $m_2$, т.е. $W_д = 2$. Тогда система уравнений свободных колебаний рамы будет

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - 1/\varphi^2 & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - 1/\varphi^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.\ 1)$$

Рама 1 раз статически неопределима и 1 раз кинематически неопределима, т.е. $Л = 1$, $n = 1$.

*2. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов от единичных сил инерции масс.*

Для определения коэффициентов определителя необходимо построить вспомогательные эпюры изгибающих моментов $M_1$ и $M_2$ от действия единичных сил инерции $x_1 = 1$ массы $m_1$ и $x_2 = 1$ массы $m_2$, а для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом сил.

Основная система рамы приведена на рис.3.1, в, для которой уравнение совместности деформации будет

$$\delta'_{11}x'_1 + \Delta'_{1p} = 0. \qquad (3.\ 2)$$

Вспомогательные эпюры для основной системы приведены на рис.3.1, г и рис. 3.1, д, соответствующим перемножением которых определяются коэффициенты

$$\delta'_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\frac{8\cdot 8\cdot 8}{3} = \frac{170{,}667}{EI},$$

$$\Delta'_{1p} = -\frac{1}{EI}\cdot\frac{8\cdot 8}{6}(2\cdot 10 + 2) = -\frac{234{,}667}{EI}.$$

Подставив эти коэффициенты в уравнение (3. 2), получим $x_1' = 1{,}375$.
Искомая эпюра $M_1$ определяется выражением

$$\overline{M}_1 = \overline{M}'_1 x'_1 + M'_p. \qquad (3.\ 3)$$

Эпюра $\overline{M}'_1 x'_1$ приведена на рис. 3.1, е, а эпюра $\overline{M}_1$ – на рис. 3.1, ж.

Аналогично построены и вспомогательные эпюры изгибающих моментов от действия единичной силы инерции $x_2 = 1$ массы $m_2$, которые приведены на рис.3.2. В этом случае

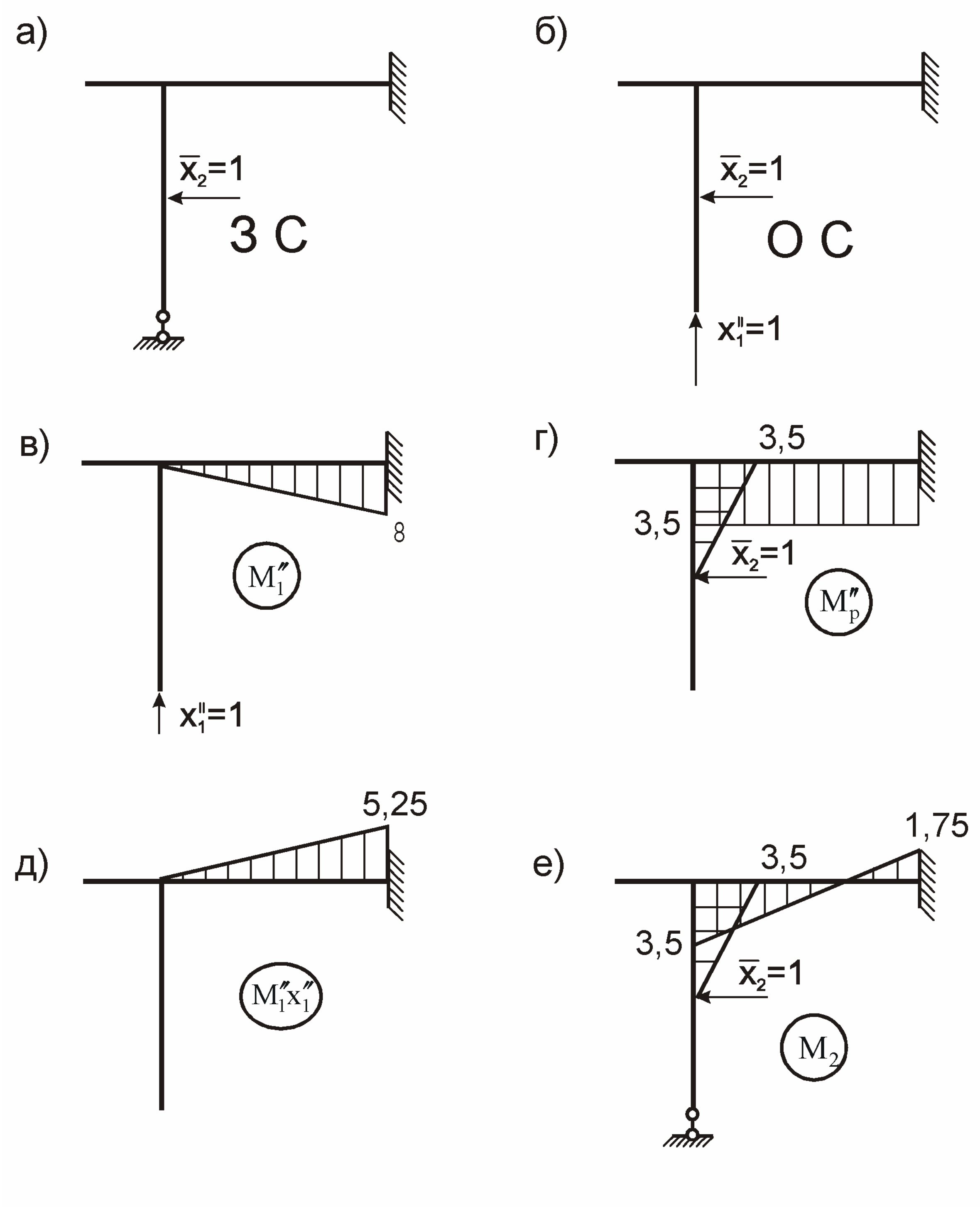


Рис. 3.2. Вспомогательные эпюры от действия силы инерции $X_2 = 1$ массы $m_2$

$$\delta''_{11} = \frac{170{,}667}{EI},$$

$$\Delta''_{1p} = \frac{112}{EI},$$

$$x''_1 = -0{,}6566.$$

Искомая опора $\overline{M}_2$ приведена на рис. 3.2, е.

Очевидно, чтобы определить коэффициенты системы уравнений, необходимо перемножить соответствующие эпюры $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$,
т.е.

$$\delta_{11} = \frac{10{,}667}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{14}{EI}, \qquad (3.\ 4)$$

$$\delta_{22} = \frac{38{,}792}{EI}.$$

Следует отметить, что для статически неопределимых задач, какой и является заданная рама, при определении перемещений можно пользоваться и эпюрами от нагрузки для основной системы задачи, т.е.

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \times M'_p,$$

$$\delta_{12} = \overline{M}_1 \times M''_p = \overline{M}_2 \times M'_p,$$

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \times M''_p.$$

Необходимо помнить, что линейные эпюры обладают свойствами коммутативности. В связи с этим, при определении перемещений (коэффициентов векового уравнения) можно выбрать наиболее рациональный способ перемножения.

*3. Формирование системы уравнений свободных колебаний и ее решение.*

Подставив найденные коэффициенты в определитель (3.1) и раскрыв его, получим следующее квадратное уравнение относительно величины, обратной частоте свободных колебаний.

$$\frac{1}{\varphi^4} - \frac{7{,}9133}{EI} \cdot \frac{1}{\varphi^2} + \frac{15{,}6103}{(EI)^2} = 0.$$

При этом

$$m_1 = m_2 = \frac{P_2}{g} = 0{,}16\,(т\cdot с^2/м),$$

Решив полученное уравнение относительно $1/\varphi^2$, получим

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{EI}{4{,}1686}}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{EI}{3{,}7478}}.$$

Подставив $EI = 2\cdot 10^7 \cdot 0{,}675\cdot 10^{-4} = 1350$ (тм$^2$),
получим значения круговых частот свободных колебаний упругой системы:
$\varphi_1 = 18$ *сек*$^{-1}$, $\varphi_2 = 19$ *сек*$^{-1}$, $\varphi_{min} = 18$ *сек*$^{-1}$.

*4. Построение вспомогательной эпюры изгибающего момента от амплитудных значений вибрационной нагрузки.*

Для упругой системы с двумя степенями свободы уравнения совместности деформаций при расчете на вынужденные колебания будут

$$\begin{cases} \delta_{11}^* x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22}^* x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

где

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1\omega^2},$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2\omega^2},$$

$$\omega = 0{,}8\varphi_1 = 14{,}4\ (с^{-1})$$

Амплитудное значение возмущающей силы равно $P_1 = 1{,}6$ т, а схема нагружения рамы приведена на рис. 3.3,а.

Очевидно, коэффициенты $\delta_{11}$, $\delta_{12}$, $\delta_{22}$ системы уравнений (3.5) определены при расчете на собственные колебания (3.4). Для определения грузовых членов $\Delta_{1p}$, $\Delta_{2p}$ необходимо построить вспомогательную эпюру изгибающего момента от статической нагрузки, равной амплитудам возмущающих сил, т.е. для рамы, представленной на рис. 3.3, а. Эту эпюру (рис.3.3, б) можно построить, используя эпюры $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ на основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией, т.е.

$$M_p = 1{,}6(\overline{M}_1 + \overline{M}_2).$$

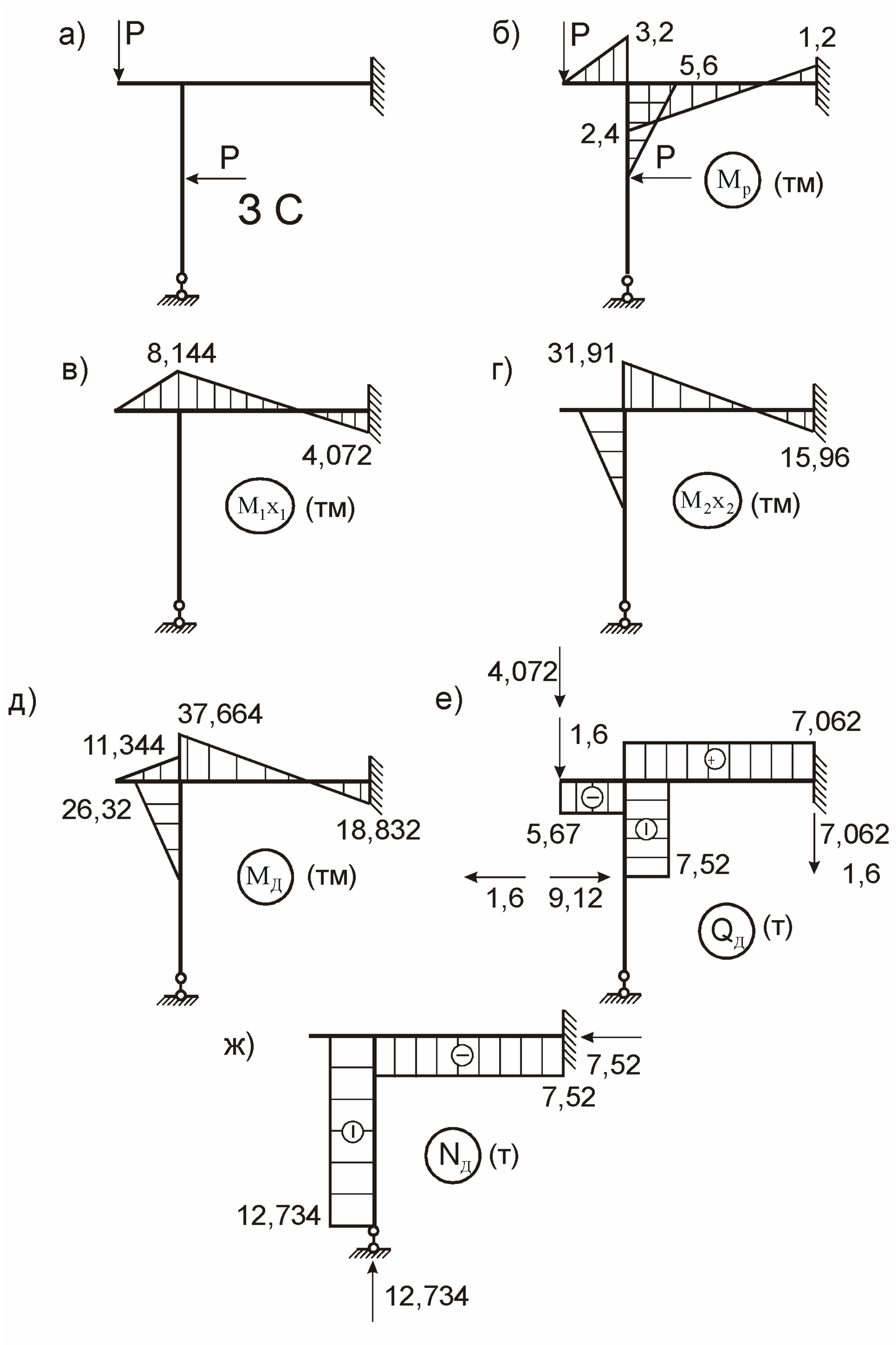


Рис. 3.3. Эпюры внутренних силовых факторов

*5. Формирование системы уравнений вынужденных колебаний и ее решение.*

Выполнив перемножение эпюры $M_p$ с эпюрами $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$, получим

$$\Delta_{1p} = -\frac{5{,}333}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{39{,}667}{EI}.$$

Тогда система уравнений (3.5) будет

$$\begin{cases} \left(\dfrac{10{,}667}{EI} - \dfrac{1}{0{,}16 \cdot 14{,}4^2}\right)x_1 - \dfrac{14}{EI}x_2 - \dfrac{5{,}333}{EI} = 0, \\ -\dfrac{14}{EI}x_1 + \left(\dfrac{38{,}792}{EI} - \dfrac{1}{0{,}16 \cdot 14{,}4^2}\right)x_2 + \dfrac{39{,}667}{EI} = 0, \end{cases}$$

решение которой ($EI = 1350$ тм$^2$) определяет амплитудные значения сил инерции масс

$x_1 = 4{,}072$ т,

$x_2 = -9{,}12$ т.

*6. Построение эпюр внутренних силовых факторов*

Эпюра $M_д$ (рис. 3.3, д) строится по выражению

$$M_д = \overline{M}_1 x_1 + \overline{M}_2 x_2 + M_p.$$

Далее строятся эпюры $Q_д$ (рис. 3.3, е) и $N_д$ (рис.3.3, ж) по известным зависимостям расчета рам при статическом нагружении.

*7. Статическая проверка.*

$\Sigma X = -1{,}6 - 7{,}52 + 9{,}12 = 0$

$\Sigma Y = 12{,}704 - 1{,}6 - 4{,}072 - 7{,}062 = 0.$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. - М.: Высшая школа, 1972. - 318 с.

2. Снитко Н.К. Строительная механика. - М.: Высшая школа,1980. - 187 с.