ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Методические указания к курсовой работе

Содержатся основные положения по расчету на прочность осесимметричных оболочек. Изложены основные положения безмоментной теории расчета оболочек. Представлены методика расчета и последовательность выполнения работы с графической интерпретацией. Даны примеры по моментной теории расчета оболочек различных схем с учетом краевых эффектов. Представлен пример расчета в среде MathCAD. В приложении приведены расчетные схемы и исходные данные по вариантам. Дан список рекомендуемой литературы.

Ил. 13. Библиогр.: 8 назв. Табл. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....4
1. *Линии и радиусы поверхности оболочки*.....4
2. Безмоментная теория осесимметрично нагруженных оболочек.....4
3. *Сферический сосуд под внутренним давлением* q 7
4. *Цилиндрический котел под внутренним давлением* 7
5. *Подвешенный бак с коническим днищем*.....8
6. Краевой эффект в цилиндрической оболочке.....10
7. Расчет длинной цилиндрической оболочки(защемление с двух сторон).....13
8. Расчет цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по концам..... 15
9. Примеры расчета оболочек вращения.....17
9.1.Цилиндрическая оболочка со сферическим днищем.....17
9.2. Цилиндрическая оболочка с плоским днищем.....19.
Библиографический список.....21
Таблица 1. Расчетные схемы оболочек.....22
Таблица 2. Исходные данные.....23

Введение

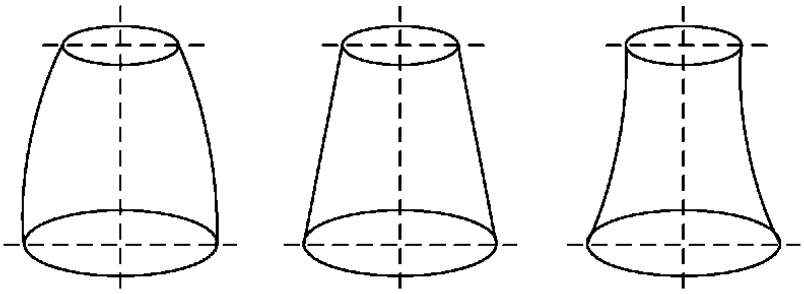
Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми незначительно по сравнению с размерами поверхностей.

1. *Линии и радиусы поверхности оболочки*

Плоскость, пересекающая поверхность оболочки и проходящая через ось вращения, образует меридиональную линию или меридиан. Линии, перпендикулярные меридианам и оси вращения называют параллелями. Поверхность, равноудаленная от внешней и внутренней поверхностей оболочки, называют срединной и имеющей двуяковую кривизну.

Радиус кривизны меридиана – ρ_m; радиус кривизны параллели – ρ_t. Радиусы ρ_m и ρ_t – главные радиусы кривизны поверхности вращения. Важное значение при изучении свойств поверхности имеет гауссова кривизна $K = \dfrac{1}{\rho_m \rho_t}$. На рис. 1 даны некоторые формы меридианов при соответствующих K.

При $K \geq 0$ – меридианы выпуклые (рис. 1, *а*); $K = 0$ – меридианы прямые линии (рис. 1, *б*); $K \leq 0$ – меридианы вогнутые (рис. 1, *в*), при этом, если $\rho_t \geq 0$, то $\rho_m \leq 0$.



а) *б*) *в*)

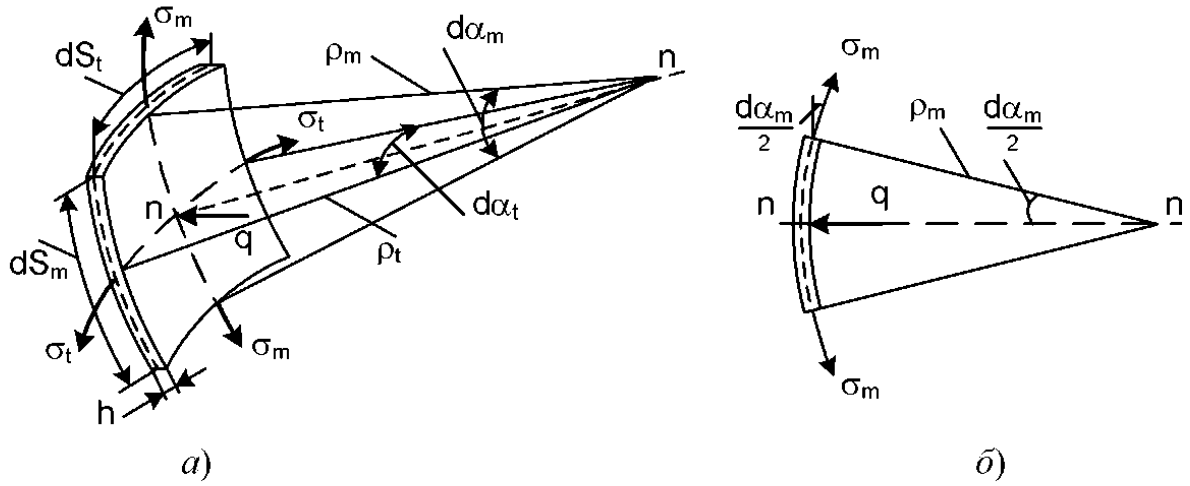
Рис. 1

2. Безмоментная теория осесимметрично нагруженных оболочек

Примером безмоментного состояния служит напряженное состояние, возникающее в оболочке под действием равномерного внутреннего давления. Оболочка испытывает только растяжение. В этом заключается ее преимущество как конструктивного элемента.

В стенках оболочки возникают нормальные меридиональные σ_m и окружные σ_t напряжения (рис. 2, *а*).

Основным признаком безмоментного состояния будет $\varepsilon \succ \chi \dfrac{h}{2}$, где ε – относительное удлинение срединной поверхности; χ – относительное изменение кривизны; h – толщина стенки. Так напряжение растяжения $\sigma_p = E \cdot \varepsilon$, а напряжение изгиба – $\sigma_и = E \cdot \chi \cdot \dfrac{h}{2}$, то, в виду незначительности величины $\chi \dfrac{h}{2}$, напряжением $\sigma_и$ можно пренебречь.



а) *б*)

Рис. 2

Рассмотрим равновесие сил, возникающих от действия внутреннего давления q на элементарной площади $dA = dS_m \cdot dS_t$ и усилий от напряжений меридионального σ_m и тангенциального σ_t с площадями $dS_t \cdot h$ и $dS_m \cdot h$. На рис. 2, *б* показана меридиональная плоскость. Спроецируем все усилия на общую нормаль $n - n$:

$$2\sigma_m \cdot h \cdot dS_t \cdot sin\frac{d\alpha_m}{2} + 2\sigma_t \cdot h \cdot dS_m \cdot sin\frac{d\alpha_t}{2} - q \cdot dS_t \cdot dS_m = 0. \quad (1)$$

Заменим синус его аргументом ввиду малости угла и разделим выражение (1) на $h \cdot dS_t \cdot dS_m$, получим

$\sigma_m \cdot \dfrac{d\alpha_m}{dS_m} + \sigma_t \cdot \dfrac{d\alpha_t}{dS_t} = \dfrac{q}{h}$, или, с учетом равенства $\dfrac{d\alpha_m}{dS_m} = \dfrac{1}{\rho_m}$; $\dfrac{d\alpha_t}{dS_t} = \dfrac{1}{\rho_t}$, окончательно определим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{q}{h}\ . \qquad (2)$$

Зависимость (2) называют уравнением Лапласа.

Если принять $dS_t = dS_m = 1$, то $N_m = \sigma_m \cdot h \cdot 1$; $N_t = \sigma_t \cdot h \cdot 1$ и уравнение (2) можно представить как $\frac{N_m}{\rho_m}+\frac{N_t}{\rho_t}=q$. (2а)

В уравнение входят два неизвестных напряжения σ_m и σ_t. Определим сначала σ_m, используя уравнение равновесия согласно рис. 3.

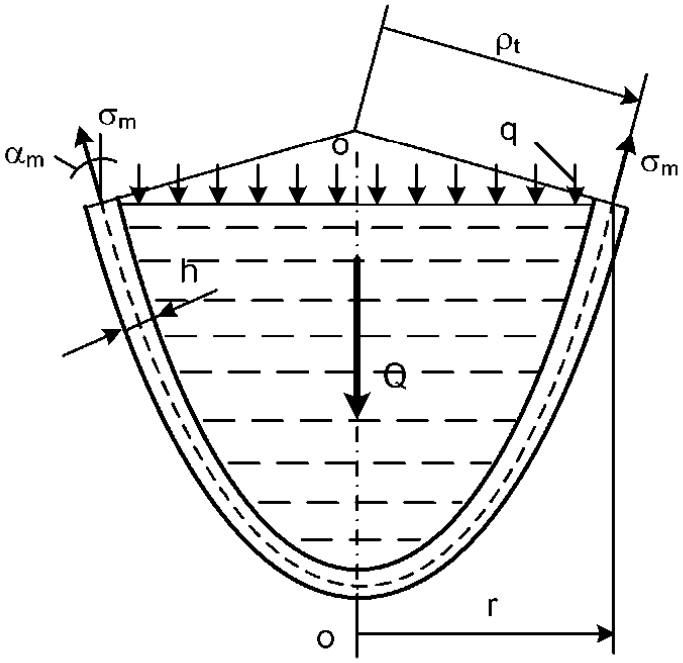


Рис. 3

Вырежем часть оболочки вращения, заполненной жидкостью.
Q – веса части жидкости и емкости, лежащие ниже рассматриваемого слоя, q – давление в жидкости с учетом избыточного (по закону Паскаля) $q = \gamma \cdot H + q_0$,
где q_0 – избыточное давление в емкости; H – глубина рассматриваемого слоя; γ – объемный вес жидкости. Площадь окружного сечения емкости рассчитаем как: $A_{окр} = 2\pi \cdot r \cdot h$.

Спроецируем силы на ось $O-O$:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot h \cdot \cos\alpha_m - q \cdot \pi \cdot r^2 - Q = 0\,. \qquad (3)$$

Отсюда: $$\sigma_m = \frac{q \cdot r}{2h \cdot \cos\alpha_m} + \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot h \cdot \cos\alpha_m}\ . \qquad (4)$$

Подставив (4) в уравнение (2), определим σ_t.

Рассмотрим конкретные расчетные схемы.

3. *Сферический сосуд под внутренним давлением q*

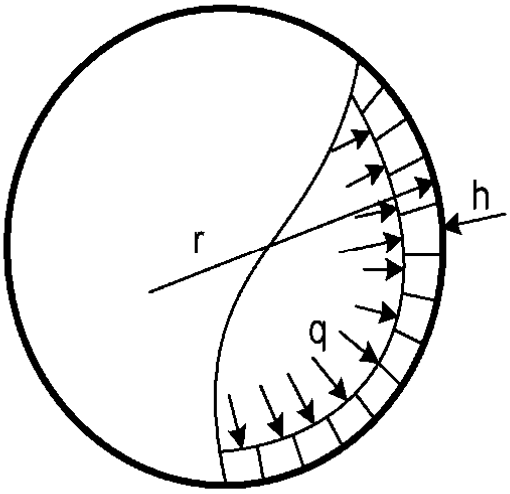


Рис. 4

Считаем, что $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$, а $\rho_m = \rho_t = r$ (рис. 4), определим

$$\sigma = \frac{q \cdot r}{2h}. \qquad (5)$$

Согласно закона Гука для плоского деформированного состояния, относительная радиальная деформация $\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m)$. В нашем примере $\varepsilon_t = \frac{2\pi(r+w) - 2\pi \cdot r}{2\pi \cdot r} = \frac{w}{r}$,

где w – абсолютное приращение радиуса сферы под давлением q.

Считая $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$, с учетом (5) и выражениях относительных деформаций, определим абсолютную деформацию

$$\frac{w}{r} = \frac{1}{E}(\sigma - \mu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\mu).$$

Таким образом, $w = \frac{\sigma \cdot r}{E}(1-\mu) = \frac{q \cdot r^2}{2E \cdot h}(1-\mu)$. (6)

4. *Цилиндрический котел под внутренним давлением*

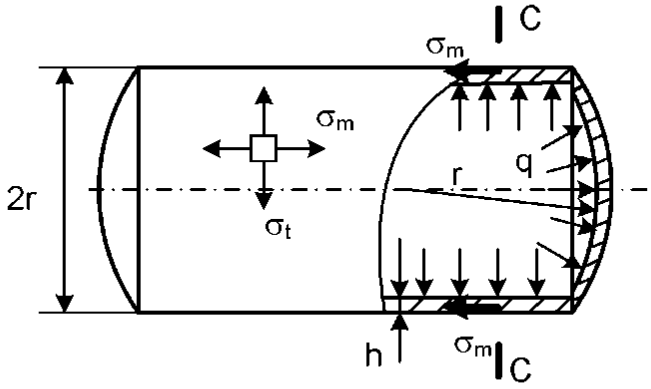


Рис. 5

Меридианами считаем образующие котла (см. рис.5), т. е. $\rho_m = \infty$; $\rho_t = r$, следовательно $\sigma_t = \dfrac{q \cdot r}{h}$.

Меридиональное напряжение определим, рассматривая равновесие правой отсеченной части котла по сечению $C - C$.

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r - q \cdot \pi \cdot r^2 = 0, \text{ или } \sigma_m = \frac{q \cdot r^2}{2h}.$$

Следовательно, окружное напряжение в два раза больше меридионального. Используя выкладки предыдущего примера, выразим абсолютное радиальное перемещение

$$\frac{w}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m) = \frac{1}{E}\left(\frac{q \cdot r}{h} - \mu\frac{q \cdot r}{2h}\right).$$

Отсюда, $w = \dfrac{q \cdot r^2}{E \cdot h}\left(1 - \dfrac{\mu}{2}\right)$. (7)

5. *Подвешенная цилиндрическая оболочка с коническим днищем*

Наполнена жидкостью объемным весом γ, (см. рис. 6).

Определить напряжения σ_t, σ_m в цилиндрической и конической частях, построить эпюры напряжений.

Начало вертикальной координаты x в днище оболочки; r_y – текущий радиус конической части; 2α – угол конуса днища.

Рассмотрим коническую часть.

Давление жидкости на глубине $H + H_1 - x$ равно $q = \gamma \cdot (H + H_1 - x)$.

Т. к. $\rho_m = \infty$, $\sigma_t = \dfrac{q \cdot \rho_t}{h}$. Проекция ρ_t на горизонтальную ось $\rho_t = \dfrac{r_y}{\cos\alpha}$. Выразим r_y через радиус оболочки $r_y = r\dfrac{x}{H_1}$. Окружное напряжение конической части примет вид:

$$\sigma_t = \frac{q}{h} r \frac{x}{H_1 \cdot \cos\alpha} = \frac{\gamma}{h} r \frac{x}{H_1 \cdot \cos\alpha}(H + H_1 - x). \qquad (8)$$

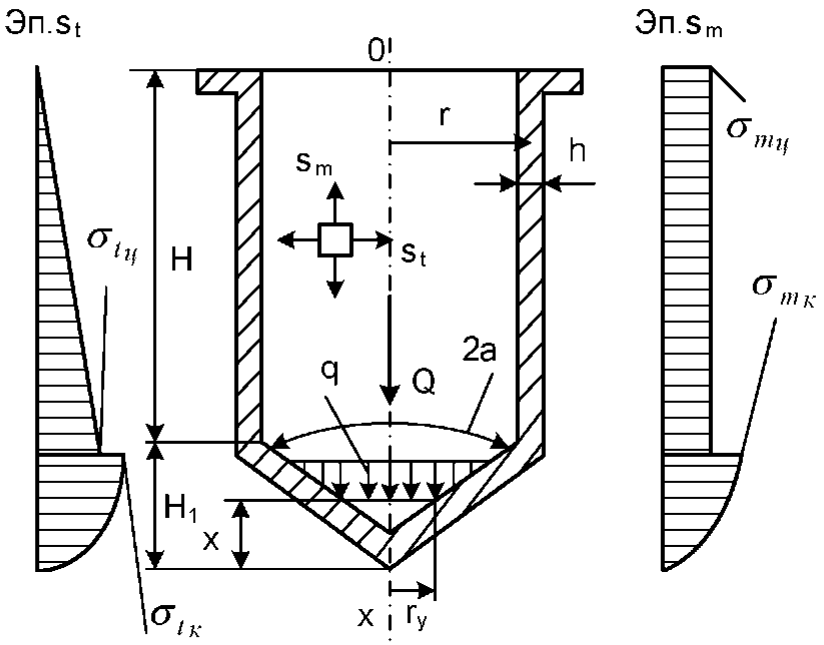


Рис. 6

При $x = H_1$; $\sigma_{t_к} = \dfrac{\gamma}{h} r \dfrac{H}{\cos\alpha}$; при $x = -(H + H_1)$; $\sigma_{t_ц} = 0$ (см. эп. σ_t, рис. 6).

Цилиндрическая часть.

Воспользуемся уравнением (4): $\sigma_m = \dfrac{q \cdot r_y}{2h \cdot \cos\alpha} + \dfrac{Q}{2h \cdot \pi \cdot r \cdot \cos\alpha}$.

Выразим q через объемный вес, r_y – через радиус оболочки.

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot r \cdot x(H + H_1 - x)}{2H_1 \cdot h \cdot \pi \cdot r \cdot \cos\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\gamma \cdot r \cdot x^3}{H_1^2 \cdot h \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\gamma \cdot r \cdot x}{6H_1^2 \cdot h \cdot \cos\alpha}\left(3H_1(H + H_1 - x) + x^2\right). \qquad (9)$$

Вес жидкости в конической части высотой x равен объему конуса на объемный вес жидкости $Q = \frac{1}{3}\gamma \cdot \pi \cdot r_y^2 \cdot x = \frac{1}{3}\gamma \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{x^2}{H_1^2}x$.

При $x = H_1$; $\sigma_{m_к} = \frac{\gamma \cdot r}{6H_1 \cdot h \cdot \cos\alpha}\left(3H \cdot H_1 + H_1^2\right)$; при $x = H_1$ и $\alpha = 0$; $\sigma_{m_ц} = \frac{\gamma \cdot r}{6h}(3H + H_1)$. Эпюры σ_m даны на рис. 6. Разрывы на эпюрах вызваны краевыми эффектами.

6. Краевой эффект в цилиндрической оболочке

(моментная теория расчета оболочек)

Длинные цилиндрические оболочки соединены фланцами, являющимися более жесткими по отношению к оболочкам. Оболочка, находящаяся под внутренним давлением q может увеличить начальный диаметр. Вследствие этого на некотором участке от фланца стенки оболочки получают искривление. Исследуем напряженное состояние и изгиб стенок оболочки (краевой эффект), считая, что продольные усилия в поперечном сечении отсутствуют.

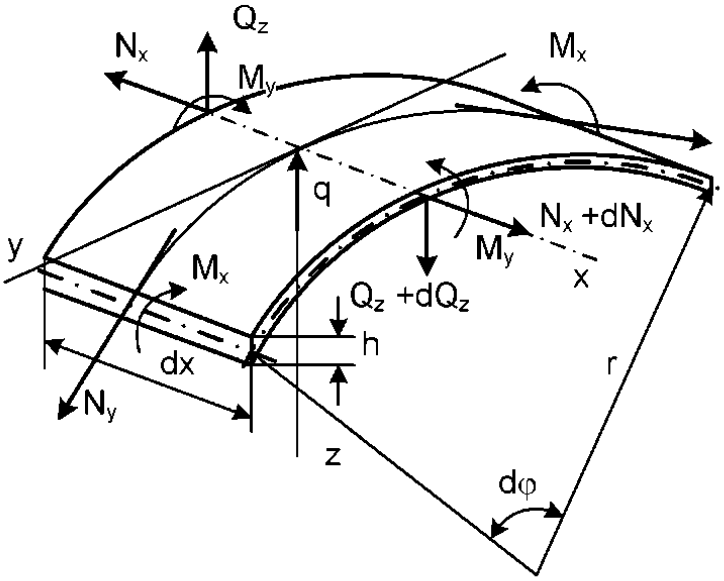


Рис. 7

В общем случае изгиб цилиндрической оболочки включает десять уравнений равновесия элемента. Из них поперечная сила $Q_y = 0$; моменты крутящие $M_{(\text{кр})xy} = M_{(\text{кр})yx} = 0$; сдвигающие силы $T_{xy} = T_{yx} = 0$.

Погонные моменты M_x и поперечные силы N_y, в виду симметрии относительно оси X не получают приращения в радиальных сечениях. Остальные уравнения равновесия, согласно рис. 7, при $h = 1$:

$\sum F_x = 0$; $\frac{dN_x}{dx} d\varphi \cdot r \cdot dx = 0$. Отсюда $\frac{dN_x}{dx} = 0$ или N_x – const.

$\sum F_z = 0$; $2N_y dx \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} + \frac{dQ_x}{dx} dx \cdot r \cdot d\varphi - q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx = 0$.

Заменим $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, сократив на $d\varphi \cdot dx$, получим

$$\frac{N_y}{r} + \frac{dQ_x}{dx} = q \tag{10}$$

$\sum m_y = 0$; $Q_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx + \frac{dQ_x}{dx} \cdot dx \cdot r \cdot d\varphi \cdot \frac{dx}{2} - \frac{dM_y}{dx} dx \cdot r \cdot d\varphi = 0$.

Второе слагаемое, в виду малости, отбрасываем, получим $Q_x = \frac{dM_y}{dx}$. Подставим данное выражение в (10), имеем

$$\frac{N_y}{r} + \frac{d^2M}{dx^2} = q. \tag{11}$$

В выражении (10) два неизвестных. Введем дополнительное уравнение погонных продольных сил $N_x = \frac{q \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r} = \frac{q \cdot r}{2}$. (12)

В дальнейшем, от дифференциальных уравнений в усилиях перейдем к дифференциальным уравнениям в радиальных перемещениях. Для этого выразим усилия через деформации, а деформации – через перемещения.

Закон Гука при плоском напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y\right); \ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x\right). \tag{13}$$

Усилия при ширине вырезанного участка, равного единице, примут вид $N_x = \frac{E \cdot h}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y\right)$; $N_y = \frac{E \cdot h}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x\right)$. (14)

Приравняем N_x выражений (12) и (14), получим

$$\varepsilon_x = \frac{q \cdot r}{2E \cdot h}\left(1 - \mu^2\right). \qquad (15)$$

Относительная радиальная деформация, при условии сохранения формы окружности, $\varepsilon_y = \dfrac{2\pi(r + w) - 2\pi \cdot r}{2\pi \cdot r} = \dfrac{w}{r}$. (16)

Погонная поперечная сила N_y, с учетом (15) и (16), равна

$$N_y = \frac{E \cdot h}{1 - \mu^2}\left(\frac{w}{r} + \mu\left(\frac{q \cdot r}{2E \cdot h}\left(1 - \mu^2\right)\right)\right) = \frac{E \cdot h}{r} w + \mu \frac{qr}{2}. \qquad (17)$$

Дополнительный погонный изгибающий момент от силы N_x имеет значение $M_{y(N_x)} = N_x \cdot w$. (18)

Изгибающие моменты от внутреннего давления q, соответственно равны,

$$M_{y(q)} = D\left(\frac{1}{\rho_1} + \mu \frac{1}{\rho_2}\right) = D\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{d^2 w}{dy^2}\right); \; M_{x(q)} = \mu \cdot M_{y(q)}.$$

При равномерном радиальном расширении цилиндрической оболочки приращение перемещения к приращению радиуса остается постоянным, $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{1}{\rho_t} = \dfrac{d^2 w}{dy^2} = 0$, поэтому моменты примут вид

$$M_{y(q)} = D\frac{1}{\rho_1} = D\frac{d^2 w}{dx^2}; \; M_{x(q)} = \mu \cdot D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}. \qquad (19)$$

Полный момент $M_y = M_{y(q)} + M_{y(N_x)} = D \cdot \dfrac{d^2 w}{dx^2} + N_x \cdot w$. (20)

Подставим (17) в (11), имеем $\dfrac{N_y}{r^2} + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(D \cdot \dfrac{d^2 w}{dx^2} + N_x \cdot w\right) = q$; раскрывая полученное выражение, учетом (12) и (17), окончательно определяем $\dfrac{E \cdot h}{r^2} w + \mu \dfrac{q}{2} + D\dfrac{d^4 w}{dx^4} + \dfrac{q \cdot r}{2}\dfrac{d^2 w}{dx^2} = q$, или

$$D\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{q \cdot r}{2}\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{E \cdot h}{r^2} w = q\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \qquad (21)$$

Выражение (21) – дифференциальное уравнение равновесия элемента цилиндрической оболочки в перемещениях.

Влияние продольной силы N_x на изменение w незначительно и ею можно пренебречь. Тогда (равенство нулю N_x) приближенное

уравнение равновесия примет вид $D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{E\cdot h}{r^2}w=q$. Данное выражение можно записать как $\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{E\cdot h}{D\cdot r^2}w=\frac{q}{D}$. (22)

Уравнение (22) можно преобразовать, обозначив $\frac{E\cdot h}{D\cdot r^2}=4\beta^4$,

где $\beta=\sqrt[4]{\frac{E\cdot h}{4D\cdot r^2}}$ – коэффициент затухания перемещений, 1/м.

$$\frac{d^4w}{dx^4}+4\beta^4\cdot w=\frac{q}{D}. \qquad (23)$$

При $q=0$ уравнение (23) примет вид $\frac{d^4w}{dx^4}+4\beta^4\cdot w=0$, (24)

балки на упругом основании.

Четырежды интегрируя уравнение (23), получим перемещение срединной поверхности оболочки

$$w=e^{\beta x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)+e^{-\beta x}(C_3\sin\beta x+C_4\cos\beta x)+f(x), \qquad (25)$$

где $f(x)$ – частное решение; при $q=const$ по всей длине оболочки, $f(x)=\frac{q\cdot r^2}{E\cdot h}$.

Следовательно, все силы и моменты можно определить как

$N_x=\frac{q\cdot r}{2}$; $N_y=\frac{E\cdot h}{r}w$; $M_y=D\frac{d^2w}{dx^2}$; $M_x=\mu\cdot M_y=\mu\cdot D\frac{d^2w}{dx^2}$; $Q_x=\frac{dM_y}{dx}=D\frac{d^3w}{dx^3}$. Угол наклона касательной к срединной поверхности $\varphi=\frac{dw}{dx}$.

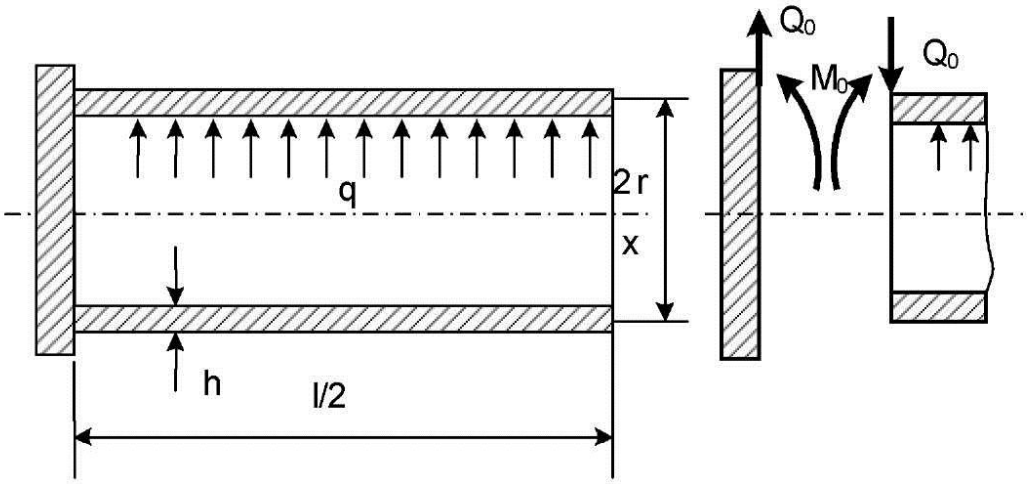
7. Расчет длинной цилиндрической оболочки (защемление с двух сторон)

Признаком длинной оболочки считают выражение $l\geq\frac{2\pi}{\beta}$.

В уравнении (25) при $x\to\infty$; $e^{\beta x}\to\infty$, что противоречит условию закрепления второго торца, следовательно, C_1 и C_2 равны нулю.

Уравнение (25) примет вид

$$w = e^{-\beta x}\left(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x\right) + f\left(x\right). \qquad (26)$$



а) *б*)

Рис. 9

На рис. 9 показана половина оболочки с защемлением левого торца, загруженная внутренним давлением q.

Расчетную схему представим как цилиндрическую оболочку, загруженную по левому торцу моментом и силой. Это возможно, если отделить массивный фланец от цилиндрической оболочки (рис. 9 *б*).

Для определения C_3 и C_4 продифференцируем уравнение (26):

$$\frac{dw}{dx} = \beta \cdot e^{-\beta x}\left(\cos \beta x\left(C_3 - C_4\right) - \sin \beta x\left(C_3 + C_4\right)\right); \qquad (26a)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\beta^2 \cdot e^{-\beta x}\left(C_4 \sin \beta x - C_3 \cos \beta x\right); \qquad (26б)$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2\beta^3 \cdot e^{-\beta x}\left(\cos \beta x\left(C_3 + C_4\right) + \sin \beta x\left(C_3 - C_4\right)\right). \qquad (26в)$$

При $x = 0$; $\dfrac{d^2 w}{dx^2} = -\dfrac{M_0}{D}$; $\dfrac{d^3 w}{dx^3} = -\dfrac{Q_0}{D}$,

где Q_0 и M_0 – поперечная сила и момент в защемлении.

Приравняем выражения (26*б*) и (26*в*), соответственно M_0 и Q_0, получим $C_3 = \dfrac{M_0}{2D \cdot \beta^2}$ и $C_4 = -\dfrac{Q_0}{2D \cdot \beta^3} - \dfrac{M_0 \cdot \beta}{2D \cdot \beta^3}$. (27)

Частное решение уравнения (26) получим согласно граничным условиям данной схемы: равенства нулю прогиба и угла поворота срединной поверхности оболочки $w_{(x=0)} = 0$; $\varphi_{(x=0)} = 0$.

По уравнению (26) имеем $C_4 = -\dfrac{q \cdot r^2}{E \cdot h}$; по уравнению (26*а*) – $C_3 = C_4$. В уравнении (27) заменим $C_3 = -\dfrac{q \cdot r^2}{E \cdot h} = \dfrac{M_0}{2D \cdot \beta^2}$. После преобразования, получим $M_0 = -\dfrac{q}{2\beta^2}$, учитывая, что $\dfrac{1}{\beta^4} = \dfrac{4D \cdot r^2}{E \cdot h}$.

Произведя замену $-\dfrac{q \cdot r^2}{E \cdot h} = -\dfrac{Q_0}{2D \cdot \beta^3} - \dfrac{M_0 \cdot \beta}{2D \cdot \beta^3}$ и, с учетом уже известного выражения $M_0 = -\dfrac{q}{2\beta^2}$, получим значение $Q_0 = \dfrac{q}{\beta}$.

Используя зависимости внутренних силовых факторов от производных w, определим и построим их эпюры.

Согласно условию прочности, определим окружное и тангенциальное напряжения $\sigma_{My} = \dfrac{6M_y}{h^2}$ и $\sigma_{Mx} = \dfrac{6M_x}{h^2}$, сравним с допускаемыми. В случае невыполнения, произведем коррекцию толщины оболочки.

8. *Расчет цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по концам*

Расчетная схема представлена рис. 10.

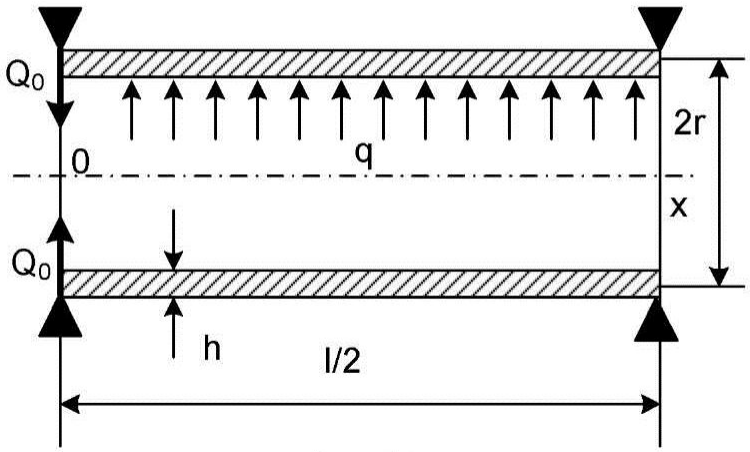


Рис. 10

Уравнение прогиба цилиндрической оболочки, согласно (26),

$$w = e^{-\beta x}\left(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x\right) + f(x).$$

Граничные условия: $x = 0$; $\dfrac{d^2 w}{dx^2} = -\dfrac{M_0}{D} = 0$; $\dfrac{d^3 w}{dx^3} = -\dfrac{Q_0}{D}$.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\beta^2 \cdot e^{-\beta x}\left(C_4 \sin \beta x - C_3 \cos \beta x\right) = 0;\ \beta^2 \cdot C_3 = 0;\ C_3 = 0.$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2\beta^3 \cdot e^{-\beta x}\left(\cos \beta x\left(C_3 + C_4\right) + \sin \beta x\left(C_3 - C_4\right)\right) = -\frac{Q_0}{D};$$

$$2\beta^3\left(C_4 + C_3\right) = -\frac{Q_0}{D};\ C_4 = -\frac{Q_0}{2D \cdot \beta^3}.$$

Определение значения Q_0.

Уравнение (26) преобразуем к виду:

$$w = e^{-\beta x}\left(-\frac{Q_0}{2D \cdot \beta^3}\cos \beta x\right) + \frac{q \cdot r^2}{E \cdot h}.$$

Частное решение уравнения (26) получим согласно граничным условиям данной схемы: равенства нулю прогиба срединной поверхности оболочки $w_{(x=0)} = 0$:

$$\frac{Q_0}{2D \cdot \beta^3} = \frac{q \cdot r^2}{E \cdot h} \text{ или } Q_0 = \frac{q}{2\beta}.$$

Уравнения углов поворота срединной поверхности, погонного момента меридионального и погонной поперечной силы, соответственно, примут выражения:

$$\frac{dw}{dx} = -C_4 \cdot \beta \cdot e^{-\beta x}\left(\cos \beta x + \sin \beta x\right);$$

$$M_y = D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = 2D \cdot \beta^2 \cdot e^{-\beta x} \cdot C_4 \cdot \sin \beta x;$$

$$Q_z = D \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = 2D \cdot \beta^3 \cdot e^{-\beta x} \cdot C_4 \cdot \left(\sin \beta x + \cos \beta x\right).$$

Напряжения, меридиональные и окружные, определяют по известным зависимостям

$$\sigma_{My} = \frac{6M_y}{h^2};\sigma_{Mx} = \frac{6M_x}{h^2}.$$

В дальнейшем, строят эпюры, определяют опасные сечения и, в случае несоблюдения условий прочности (жесткости) проводят коррекцию толщины оболочки.

9. Примеры расчета оболочек вращения

9.1. *Цилиндрическая оболочка со сферическим днищем*

На рис. 11 изображена цилиндрическая оболочка вращения со сферическим днищем. Толщина цилиндра и сферы постоянна, равна h. Радиус срединных поверхностей – r. Оболочка загружена внутренней распределенной нагрузкой q.

Определить:

а) Начальные параметры M_0, Q_0;

б) Построить эпюры моментов изгибающих, поперечных сил, прогибов, углов поворота по длине оболочки, $M_{(x)}$; $Q_{(x)}$; $W_{(x)}$; $\varphi_{(x)}$;

в) Определить опасное сечение и вычислить нормальные меридиональные и окружные напряжения.

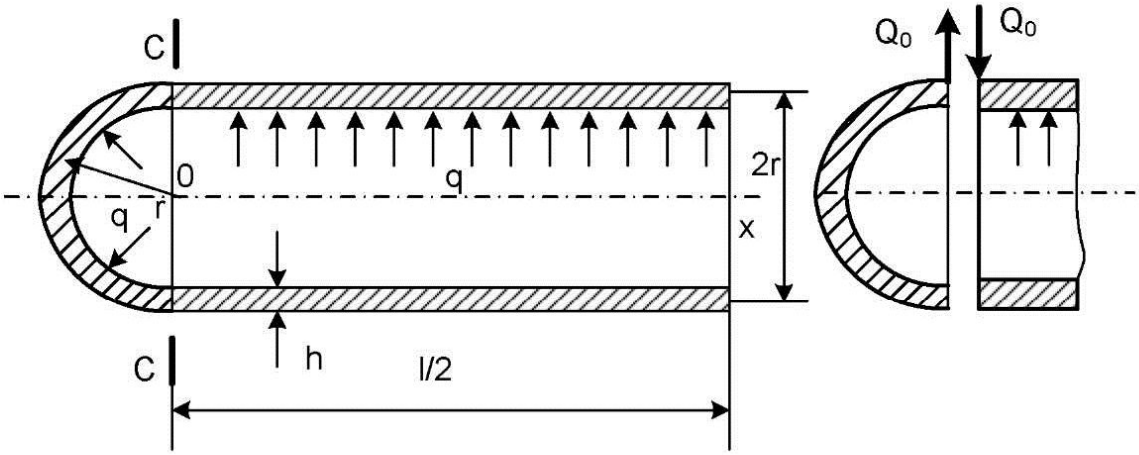


Рис. 11

1. Определяем цилиндрическую жесткость оболочки

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12\left(1-\mu^2\right)};$$

2. Вычисляем коэффициент затухания перемещений

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h}{4r^2 \cdot D}};$$

3. Выбираем начало координат в сечении $C-C$ – переходе из цилиндрической оболочки в сферическую;

4. Рассматриваем взаимное равновесие полусферической и цилиндрической оболочек. Читаем, что общая касательная в переходе от цилиндрической оболочки к сферической поворачивается под действием Q_0 на одинаковый угол. Взаимный угол поворота отсутствует, следовательно, не возникает взаимный погонный изгибающий момент M_0.

Суммарные взаимные линейные деформации от действия Q_0 и q равны:

$$\Delta = (w_ц)_{Q_0} + (w_т)_{Q_0};$$
$$\Delta = (w_ц)_q - (w_т)_q,$$

где $(w_ц)_q = \frac{q \cdot r^2}{E \cdot h}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$ – радиальное перемещение цилиндрической оболочки от действия q; $(w_т)_q = \frac{q \cdot r^2}{2E \cdot h}(1 - \mu)$ – аксиальное перемещение сферического днища от действия q; $(w_ц)_{Q_0} = (w_т)_{Q_0}$.

Так как $\Delta = (w_ц)_q - (w_т)_q = \frac{q \cdot r^2}{E \cdot h}$ и, согласно (27),

$$w_{x=0} = -\frac{1}{2D\beta^3}(\beta \cdot M_0 + Q_0);\ 2(w_{x=0})_{Q_0} = \frac{2Q_0}{2D\beta^3} = \Delta = \frac{q \cdot r^2}{2E \cdot h}.$$

Отсюда $Q_0 = \frac{q \cdot r^2 \cdot D \cdot \beta^3}{2E \cdot h}$. С учетом $\beta^4 = \frac{E \cdot h}{4r^2 \cdot D}$, определяют $Q_0 = \frac{q}{8\beta}$.

5. Уравнение прогибов $w_{(x)} = \frac{Q_0}{2\beta^3 \cdot D} e^{-\beta x} \cos \beta x$;

6. Уравнение углов поворота срединной поверхности

$$\varphi_{(x)} = \frac{Q_0}{2\beta^2 \cdot D} e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x);$$

7. Уравнение погонного момента радиального

$$M_{r(x)} = \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x;$$

8. Уравнение погонной радиальной силы

$$Q_{(x)} = Q_0 \cdot e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x).$$

9.2. *Цилиндрическая оболочка с плоским днищем*

Оболочка нагружена внутренним давлением q. Толщина цилиндра и днища равны h (рис.12).

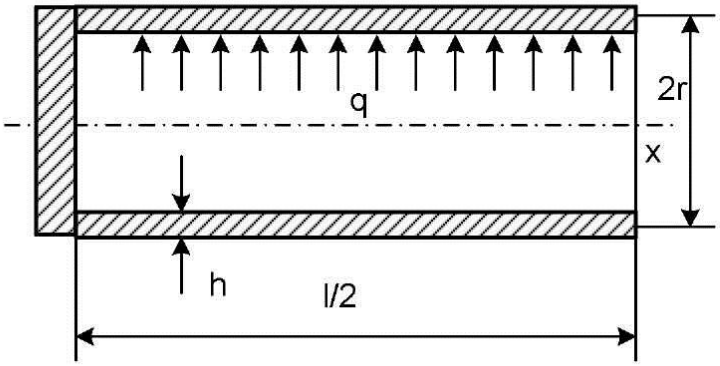
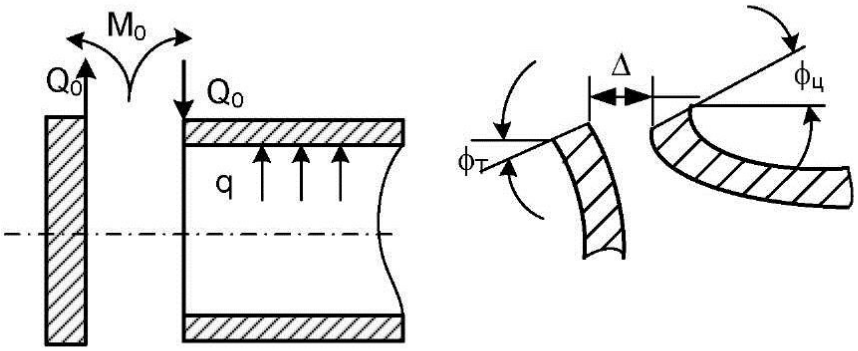


Рис. 12

Рассмотрим половину длины оболочки. Разделив днище и цилиндр, представим днище в виде круглой пластины, защемленной по контуру, рис. 13 *а*.



а) *б*)

Рис.13

Уравнение углов поворота срединной плоскости пластины $\varphi = -\dfrac{q}{16D_T} r^3 + \dfrac{C_1}{2} r + \dfrac{C_2}{r}$. Граничные условия: при $r = 0$ (середина днища) $\varphi = 0$; следовательно, $C_2 = 0$. При этом $D_T = \dfrac{E \cdot h^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость днища.

Радиальный погонный момент $M_r = D_T\left(\dfrac{d\varphi}{dr} + \mu\dfrac{\varphi}{r}\right)$. Из теории круглых пластин $M_r = D_T\left(-\dfrac{q \cdot r^2}{16D}(3+\mu) + \dfrac{C_1}{2}(1+\mu)\right)$. Радиальный момент на контуре соответствует $M_{r(r)} = M_0$.

Отсюда, $D_T\left(-\frac{q\cdot r^2}{16D}(3+\mu)+\frac{C_1}{2}(1+\mu)\right)=M_0$. Следовательно,

$$C_1=\frac{q\cdot r^2}{8D_T}\left(\frac{3+\mu}{1+\mu}\right)-\frac{2M_0}{D_T(1+\mu)}.$$

Окончательно, уравнение угла поворота срединной поверхности днища примет вид: $\varphi_T(q,M_0)=\frac{r}{D_T(1+\mu)}\left(\frac{q\cdot r^2}{8}-M_0\right)$.

Радиальный погонный изгибающий момент

$$M_{rT}=\frac{q}{16D_T}(3+\mu)\left(r^2-r_0^2\right)-M_0,$$

где r_0 – текущий радиус пластины (днища).

Считают, что радиальные перемещения пластины малы, $w_T(Q_0)=w_T(M_0)=0$, взаимное радиальное перемещение пластины и оболочки $\left(w_Ц\right)_{Q_0}-\left(w_T\right)_{M_0}=\Delta=\left(w_Ц\right)_q=\frac{q\cdot r^2}{E\cdot h}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)$. С учетом (27) радиальное перемещение оболочки

$$-\frac{Q_0}{2\beta^3\cdot D}+\frac{M_0}{2\beta^2\cdot D}+\frac{q\cdot r^2}{E\cdot h}\left(1-\frac{\mu}{2}\right). \qquad (а)$$

Остается сравнить взаимные угловые перемещения днища и цилиндрической оболочки

$$\frac{Q_0}{2\beta^2\cdot D}+\frac{M_0}{\beta\cdot D}=\frac{q\cdot r^3}{8D_T(1+\mu)}-\frac{M_0\cdot r}{D_T(1+\mu)}. \qquad (б)$$

Совместное решение (а) и (б) дает

$$Q_0=M_0\cdot\beta+\frac{q}{2\beta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right);$$

$$M_0=\frac{q\cdot r^2\cdot D}{\frac{1}{2\beta}+\frac{r}{1+\mu}}\left(\frac{r}{8D(1+\mu)}+\frac{\beta\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{E\cdot h}\right).$$

1. Уравнение прогибов цилиндрической оболочки

$$w(x)=\frac{e^{-\beta x}}{2D\beta^3}\left(M_0\cdot\beta(\sin\beta x-\cos\beta x)-Q_0\cos\beta x\right);$$

2. Угол поворота срединной поверхности

$$\varphi(x)=\frac{dw}{dx}=\frac{\beta}{2D\beta^3}\left(2M_0\cdot\beta\cdot e^{-\beta x}\cdot\cos\beta x+Q_0\cdot e^{-\beta x}(\sin\beta x+\cos\beta x)\right);$$

3. Погонный изгибающий радиальный момент

$$M_r(x)=\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{1}{D\beta}\left(\beta M_0 e^{-\beta x}(\sin\beta x+\cos\beta x)+Q_0 e^{-\beta x}\sin\beta x\right);$$

4. Погонная поперечная сила

$$Q_z(x)=\frac{d^3w}{dx^3}=-\frac{1}{D}\left(2\beta M_0 e^{-\beta x}\sin\beta x-Q_0 e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)\right).$$

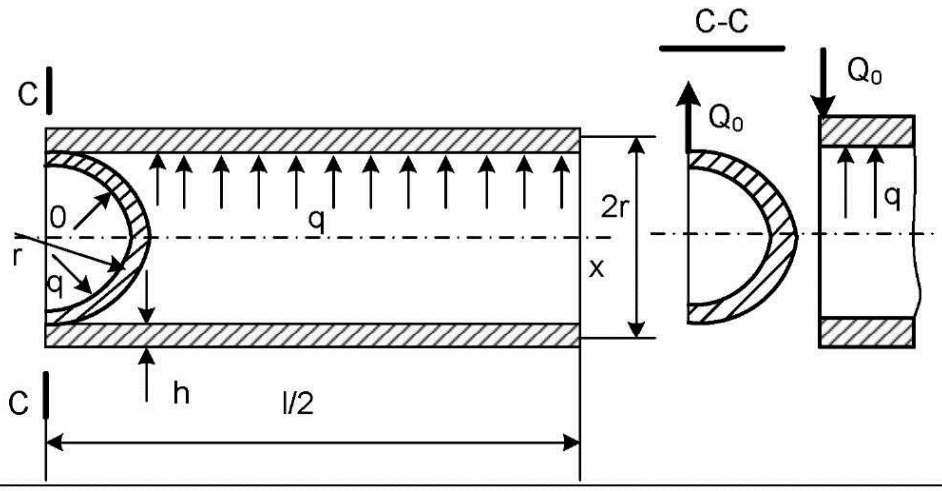
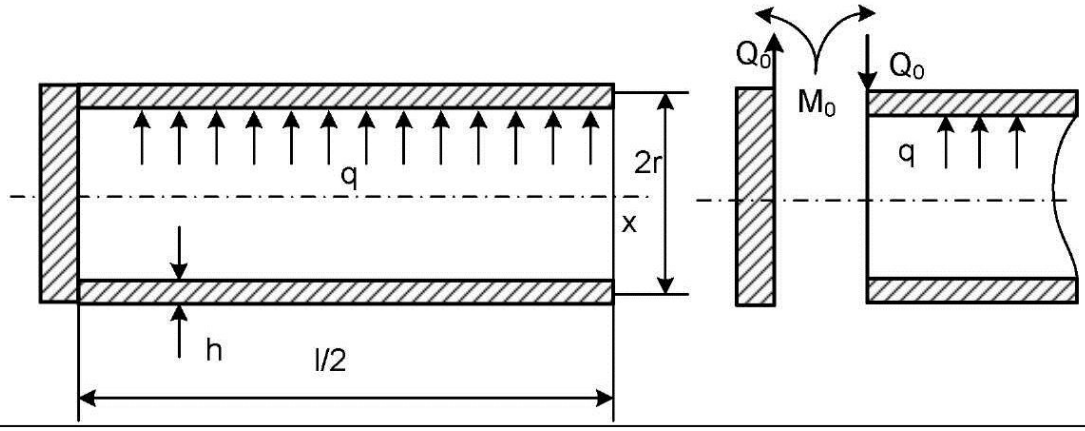
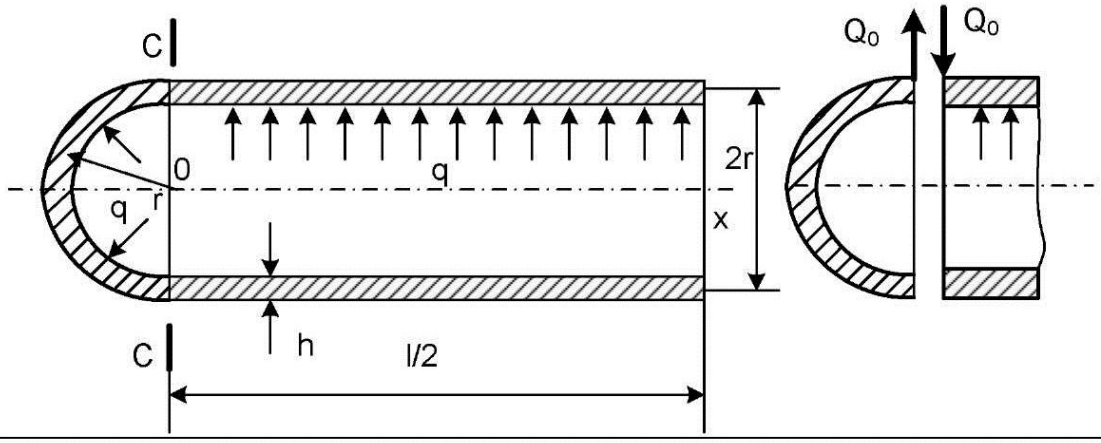
5. Радиальное напряжение $\sigma_r=\frac{6M_r}{h^2}$ сравнить с допускаемым и, в случае необходимости, откорректировать h.

Библиографический список

1. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Уч. пособие для студентов вузов.– М.: Машиностроение, 1973.
2. Доннелл Л.Г. Балки, пластини и оболочки: Пер. с англ./ Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1982.
3. Искрицкий Д.Е. Строительная механика элементов машин.– Л.: Судостроение, 1969.
4. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Уч. курс. – СПб.: Питер, 2005.
5. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004.
6. Папкович П.Ф. Тр. по строительной механике корабля в 4-х томах. Т. 3. Сложный изгиб стержней и изгиб пластин./ Под общ. ред. В.В. Екимова.– Л. Судостроение, 1962.
7. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб.: БХВ – Петербург, 2007.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966.

Расчетные схемы оболочек

Таблица 1

№ п/п	Схема
1	
2	
3	

Исходные данные

Таблица 2

№ вар.	Исходные данные					
	Схема	q кН/м^2	h м	l м	r	E ГПа
1	2	40	0,004	0,25	0,06	210
2	3	35	0,005	0,28	0,055	210
3	5	30	0,003	0,26	0,075	200
4	2	25	0,0025	0,24	0,08	200
5	4	40	0,006	0,22	0,065	210
6	4	30	0,0045	0,23	0,07	200
7	2	32	0,003	0,20	0,08	200
8	3	36	0,004	0,22	0,085	210
9	5	44	0,006	0,26	0,065	210
10	2	46	0,009	0,28	0,065	200
11	4	44	0,008	0,28	0,08	200
12	5	20	0,003	0,22	0,055	210
13	2	25	0,003	0,23	0,09	210
14	3	28	0,0025	0,22	0,065	200
15	4	38	0,005	0,23	0,085	200
16	5	35	0,006	0,24	0,06	210
17	3	38	0,006	0,25	0,09	200
18	2	35	0,007	0,28	0,075	200
19	4	40	0,008	0,30	0,08	210
20	5	45	0,008	0,20	0,075	200
21	3	35	0,006	0,25	0,065	200
22	2	30	0,005	0,25	0,075	210
23	4	40	0,006	0,26	0,3	200
24	4	35	0,007	0,24	0,25	200
25	5	30	0,005	0,25	0,3	210