ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ
Учебное пособие

Что такое нелинейность?

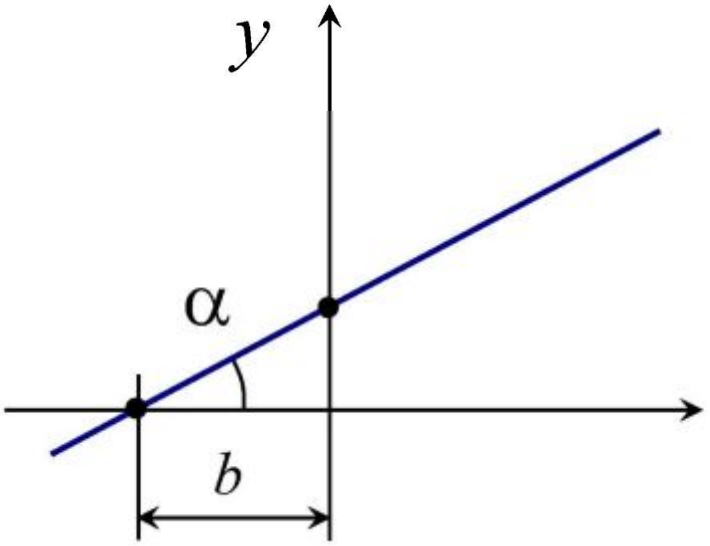
Линейная функция n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n) = \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n$$

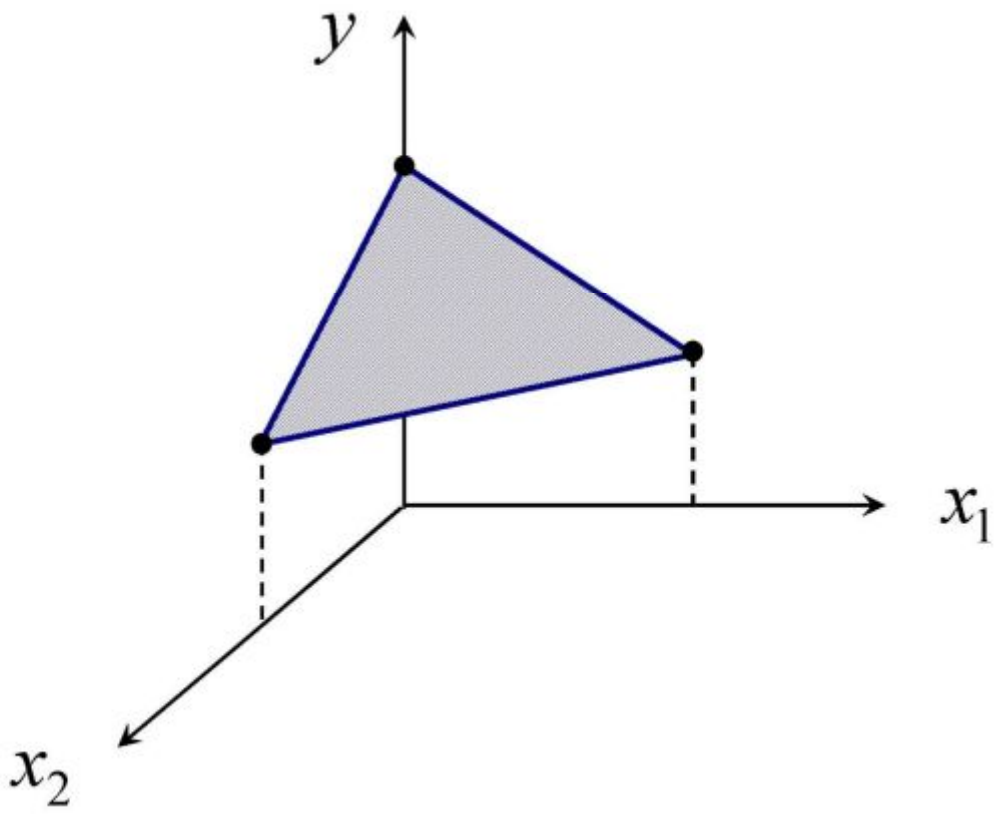
Частные случаи

1. Прямая линия $y(x) = kx + b$



$k = \mathrm{tg}\alpha$

2. Плоскость $y(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$



Линейное дифференциальное уравнение

Пример (изгиб статически определимой балки)

$$EJ \cdot v''(x) = M(x)$$

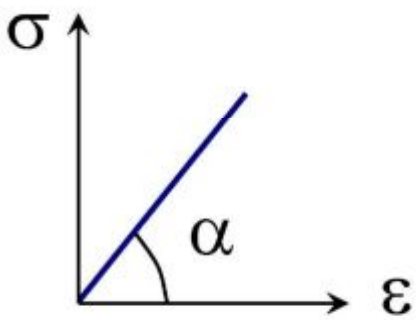
$v(x)$ прогиб балки

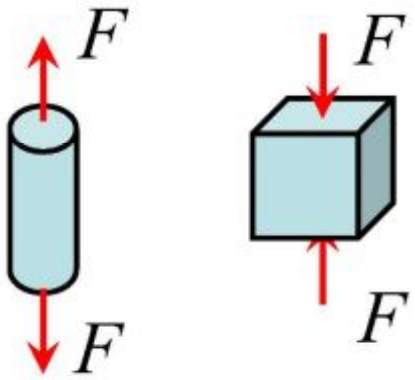
$M(x)$ изгибающие моменты

EJ жесткость сечения на изгиб

Условия линейности задачи СМ

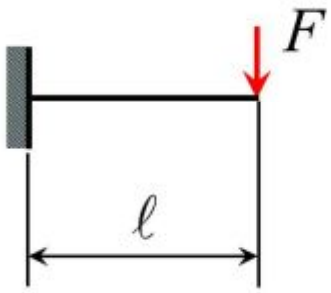
1. Материал конструкции линейно-упругий

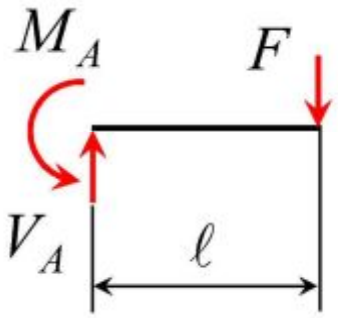




$E = \mathrm{tg}\alpha$ модуль упругости материала

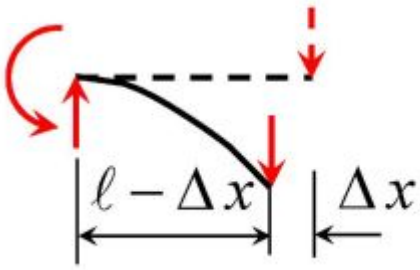
2. Расчет ведется по недеформированной схеме





$$V_A = F$$

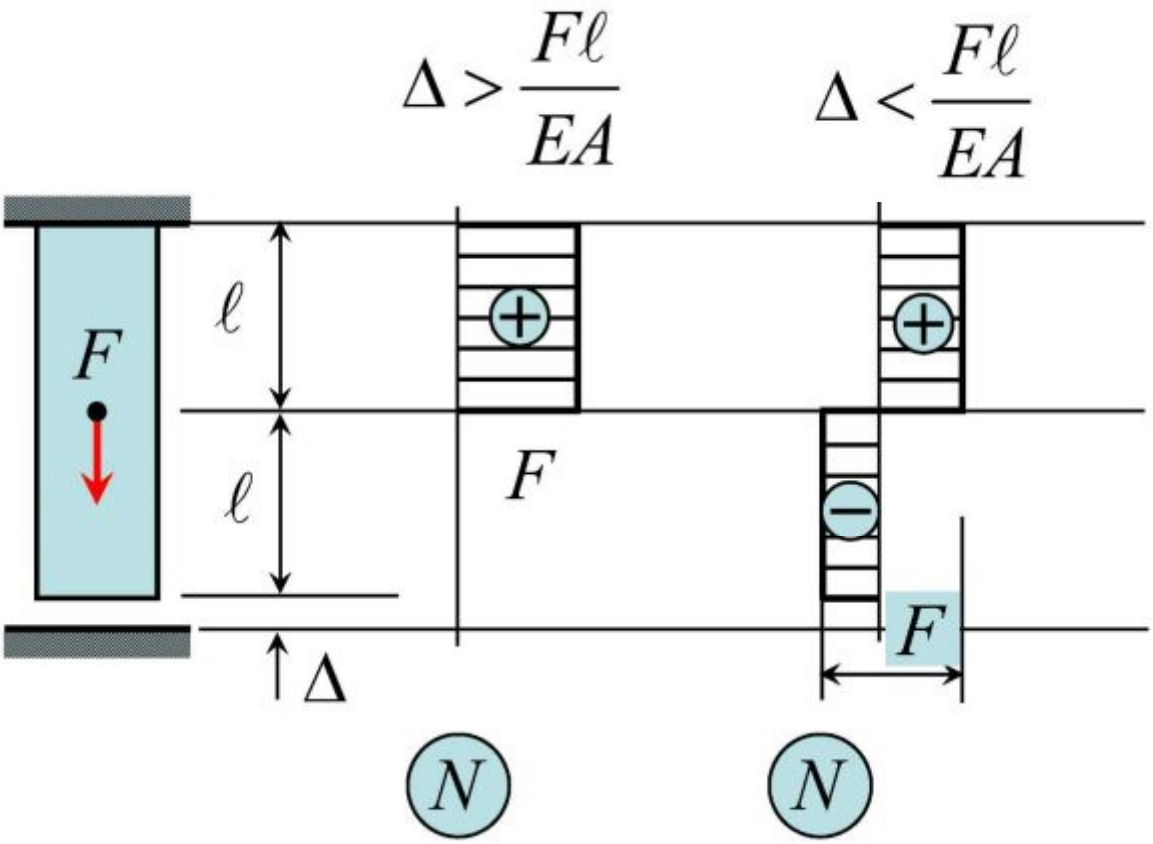
$$M_A = F \cdot \ell$$



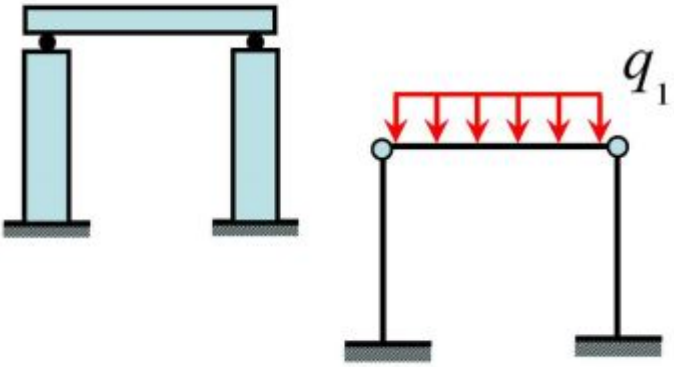
$$M_A = F \cdot (\ell - \Delta x)$$

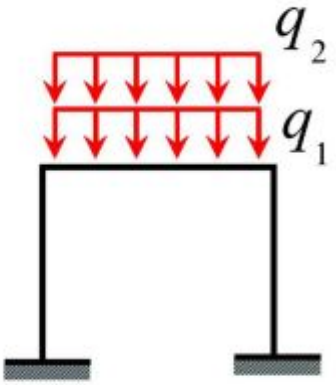
Величиной Δx пренебрегают

3. Расчетная схема в ходе расчета не меняется



4. Результаты расчета не зависят от «истории создания» конструкции





q_1 собственный вес ригеля

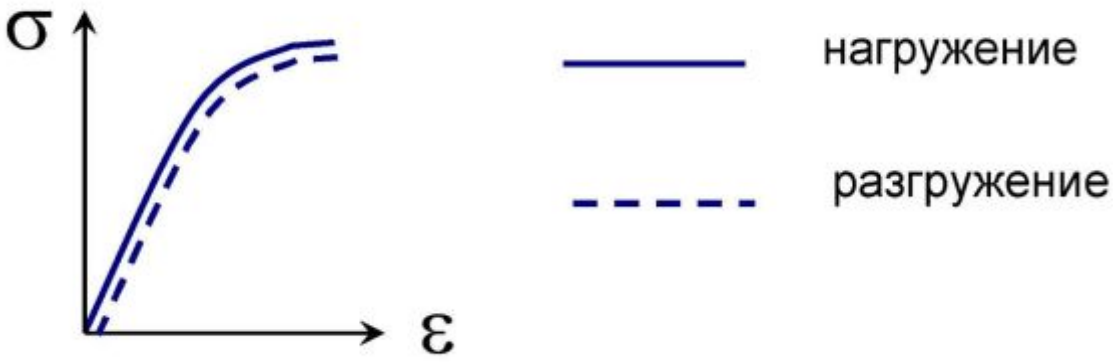
q_2 вес плит + полезная нагрузка

Расчет окончательного состояния

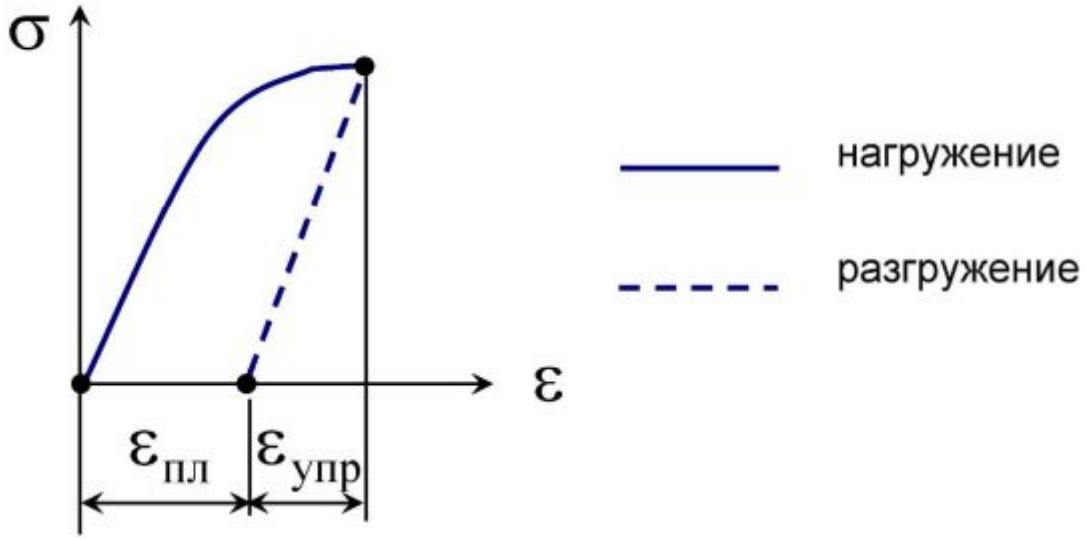
Виды нелинейностей

1. Физическая нелинейность

Нелинейно-упругий материал



Упруго-пластический материал

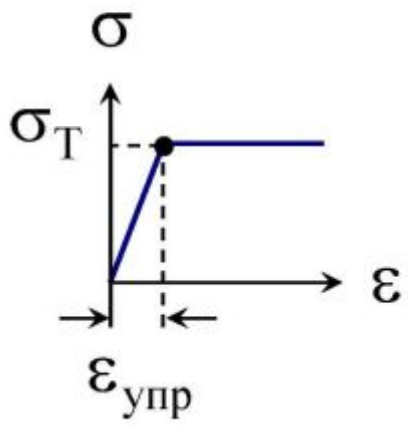


$\varepsilon_{пл}$ пластическая деформация

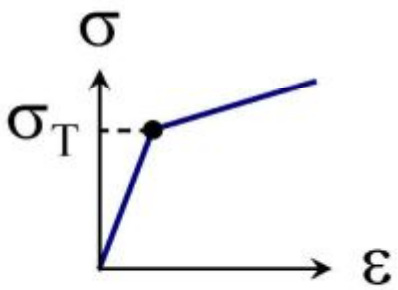
$\varepsilon_{упр}$ упругая деформация

Идеализированные диаграммы

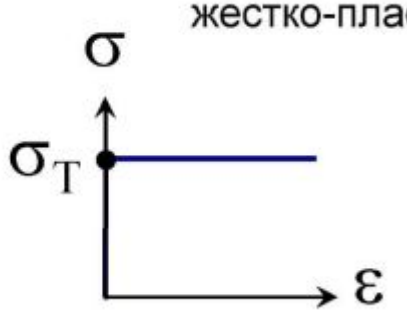
упруго-пластический



упруго-пластический
с упрочнением



жестко-пластический $\varepsilon_{упр} \approx 0$



2. Геометрическая нелинейность

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''(x)}{\sqrt{\left((1+[v'(x)]^2\right)^3}}$$

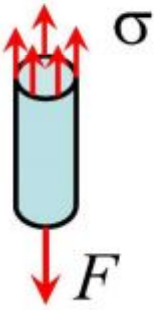
$$[v'(x)]^2 \approx 0$$

$$\frac{1}{\rho} \approx v''(x)$$

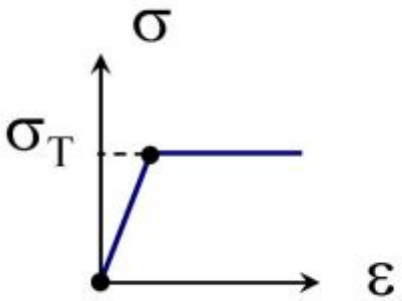
Расчет стержневых систем, работающих на растяжение-сжатие

Гипотеза плоских сечений

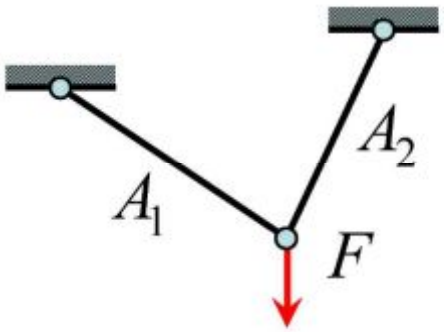
Материал идеальный упруго-пластический

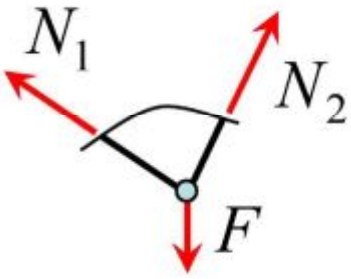


$$\sigma = \frac{N}{A}$$



Статически определимая система





$$\sum x = 0$$
$$\sum y = 0$$

$$N_1 = \ldots \qquad N_2 = \ldots$$

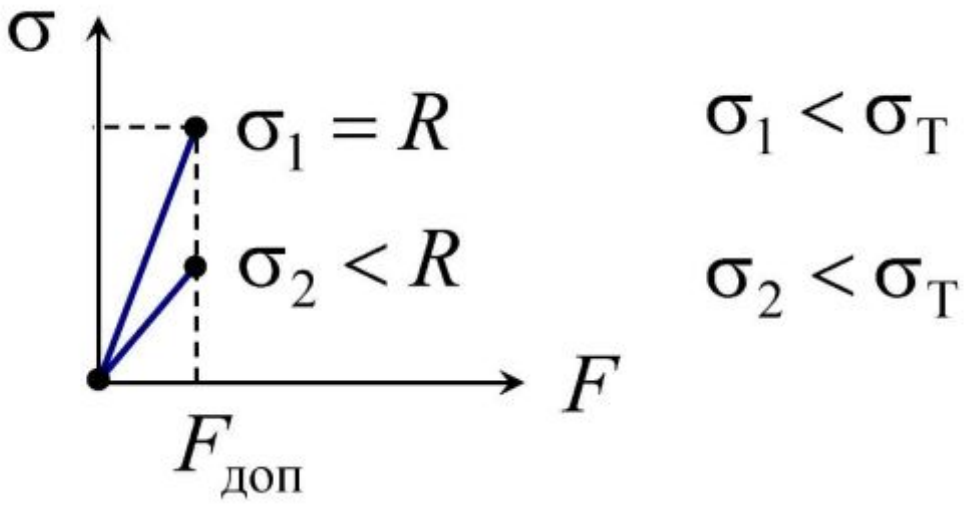
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

Условие прочности

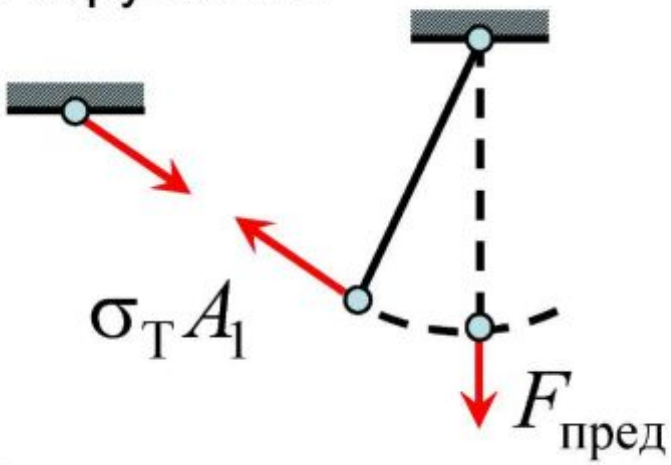
$$\max \sigma = \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} < R$$

R - расчетное сопротивление материала

$$\sigma_1 = R \quad \Rightarrow \quad F_{\text{доп}} = \ldots$$



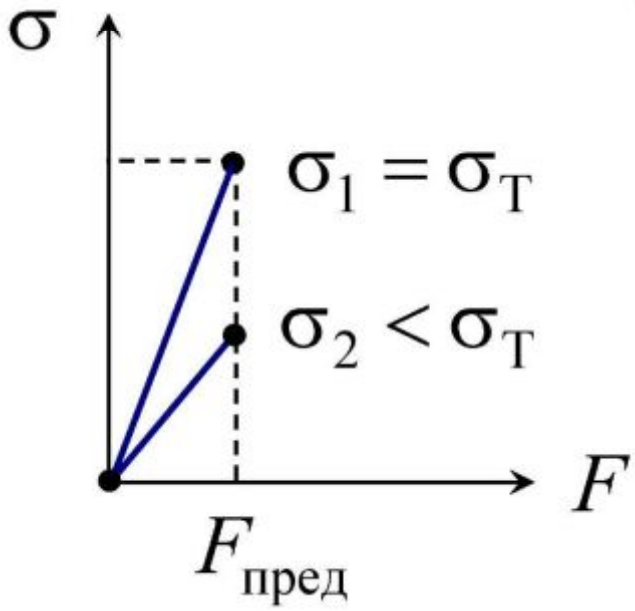
Разрушение



$$\sigma_1 = \sigma_T$$

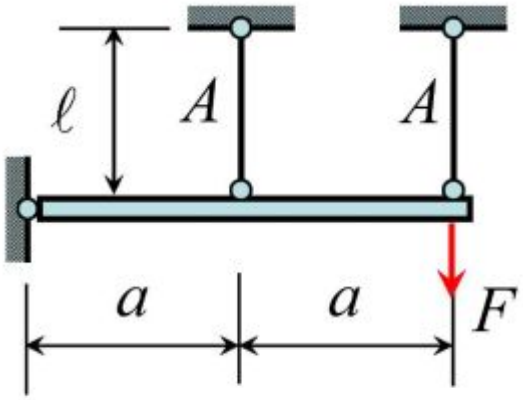
$$\Downarrow$$

$$F_{пред} = \ldots$$

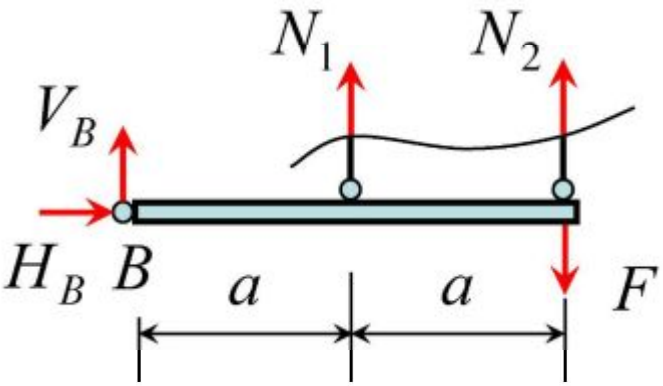


$$F_{пред} > F_{доп}$$

Статически неопределимая система



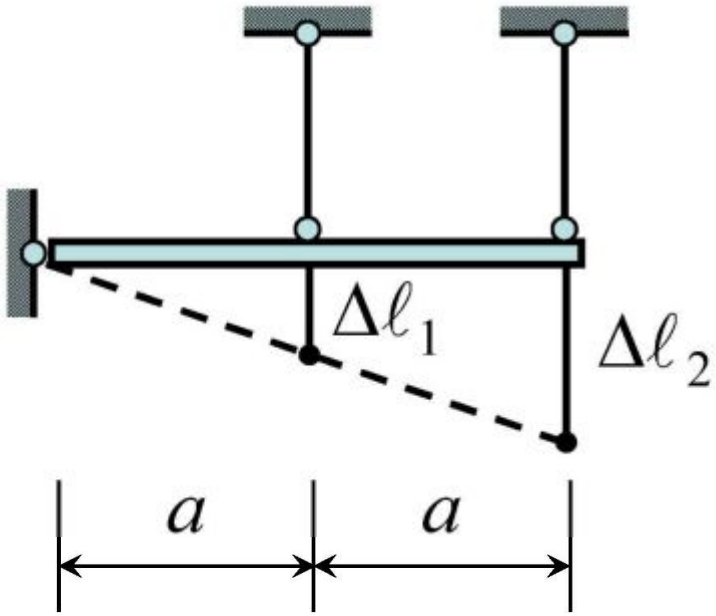
Упругий расчет



$$\sum m(B) = 0$$

$$N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot 2a = 0$$

$$N_1 + 2N_2 = 2F$$



$$\frac{\Delta\ell_1}{a} = \frac{\Delta\ell_2}{2a}$$

$$\frac{N_1\ell}{EA} = \frac{N_2\ell}{2EA}$$

$$N_1 = \frac{N_2}{2}$$

$$0{,}5N_2 + 2N_2 = 2F$$

$$N_2 = \frac{2F}{2{,}5} = 0{,}8F \qquad N_1 = 0{,}4F$$

Первая стадия работы (упругая)

$$\sigma_1 = \frac{0{,}4F}{A}$$

$$\sigma_2 = \frac{0{,}8F}{A}$$

Условие прочности

$$\max\sigma = \sigma_2 = R \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}8F_{\text{доп}}}{A} = R$$

$$F_{\text{доп}} = \frac{A \cdot R}{0{,}8} = 1{,}25A \cdot R$$

$$R = 240\,\text{МПа} = \ 24\,\text{кН/см}^2$$

$$A = 10\,\text{см}^2$$

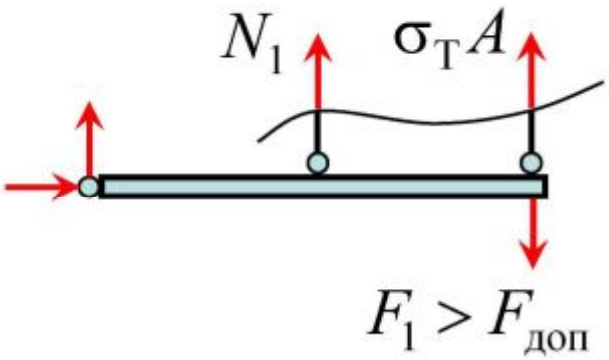
$$F_{\text{доп}} = \ 1{,}25 \cdot 10 \cdot 24 = \ 300\,\text{кН}$$

$$\ell = 1\,\text{м} = 100\,\text{см}$$

$$E = 2 \cdot 10^5\,\text{МПа} = \ 2 \cdot 10^4\,\text{кН/см}^2$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{0{,}4F_{\text{доп}}\ell}{EA} = \ \frac{0{,}4 \cdot 300 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0{,}060\ \text{см}$$

Вторая стадия работы (упруго-пластическая)



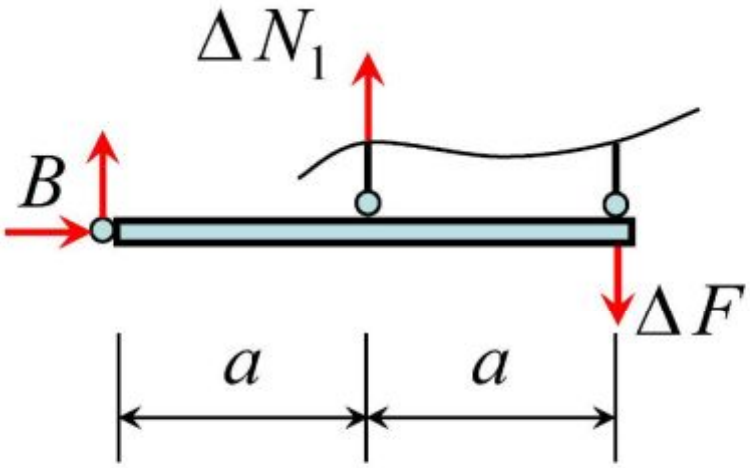
$$\sigma_1 < \sigma_T$$

$$\sigma_2 = \frac{0{,}8F_1}{A} = \sigma_T$$

$$\sigma_T = 245\,\text{МПа} = 24{,}5\,\text{кН/см}^2$$

$$F_1 = \frac{\sigma_T A}{0{,}8} = \frac{24{,}5 \cdot 10}{0{,}8} = 306{,}3\ \text{кН}$$

$$N_1 = 0{,}4F_1 = 122{,}5\ \text{кН}$$



$$\sum m(B) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta F = \frac{\Delta N_1}{2}$$

$$N_1 + \Delta N_1 = \sigma_T A$$

$$\Delta N_1 = \sigma_T A - N_1 = 24{,}5 \cdot 10 - 122{,}5 =$$

$$= 122{,}5 \text{ кН}$$

$$\Delta F = \frac{122,5}{2} = \ 61,3 \text{ кН}$$

$$F_{\text{пред}} = F_1 + \Delta F = 306,3 + 122,5 =$$

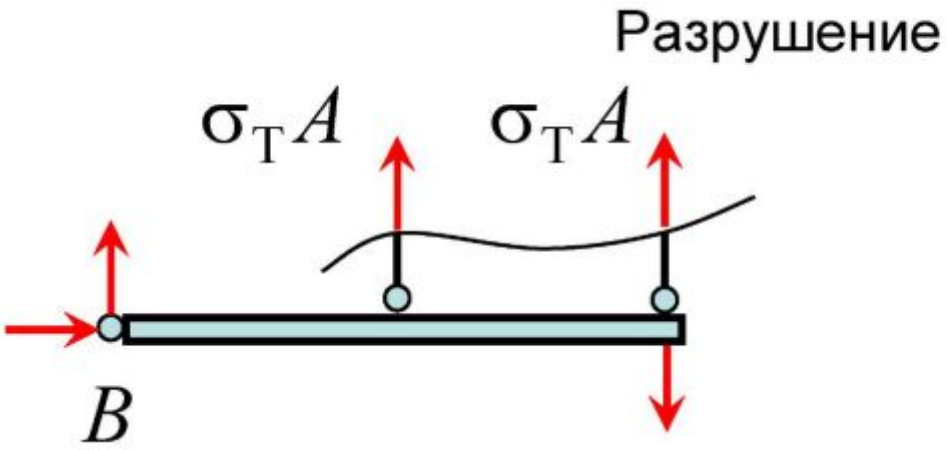
$$= 367,8 \text{ кН}$$

$$\frac{F_{\text{пред}}}{F_{\text{доп}}} = 1,23 \qquad \text{увеличение} \quad 23\%$$

Порядок расчета

1. Упругий расчет

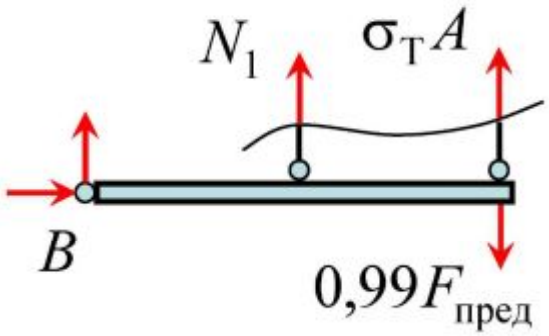
2. Доводим стержни до разрушения поочередно



$$F_2 = F_{\text{пред}}$$

$$\sum m(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{пред}} = 1{,}5\sigma_T A$$

$$F_{\text{пред}} = 1{,}5 \cdot 10 \cdot 24{,}5 = 367{,}5\,\text{кН}$$



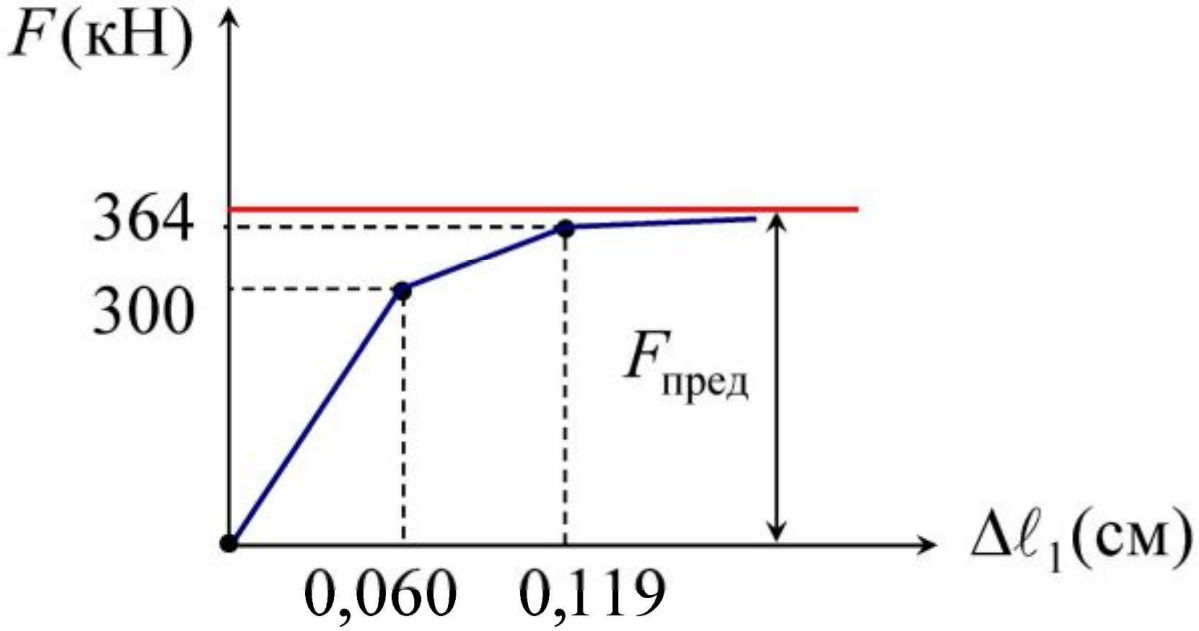
$$\sum m(B) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$N_1 = 2\left(0{,}99F_{\text{пред}} - \sigma_T A\right) =$$

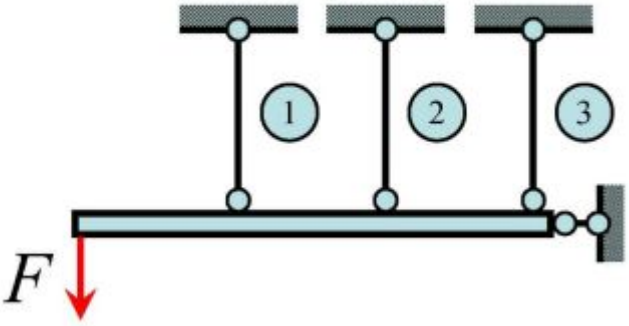
$$= 2\left(0{,}99 \cdot 367{,}5 - 24{,}5 \cdot 10\right) = 238 \text{ кН}$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{238 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0{,}119 \text{ см}$$



Зависимость $F - \Delta\ell$ нелинейная

Принцип независимости действия сил не действует



Сколько стержней должно потечь?

Матрица вариантов

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & 2 & 3 \\ 1 & \bigcirc & 3 \\ 1 & 2 & \bigcirc \end{pmatrix}$$

1) $2-3$

2) $1-3$

3) $1-2$

Как определить количество вариантов в общем случае?

Требуется определить количество сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n общее число элементов

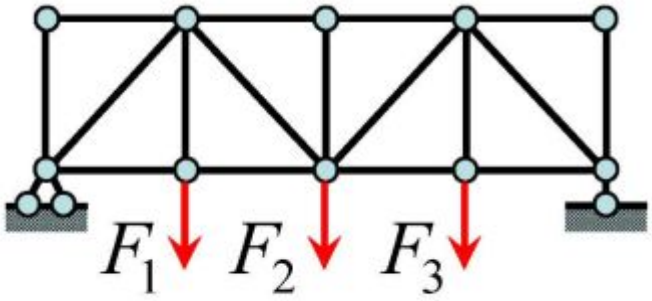
r число отобранных элементов

$$n = 3$$

$$r = 2$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

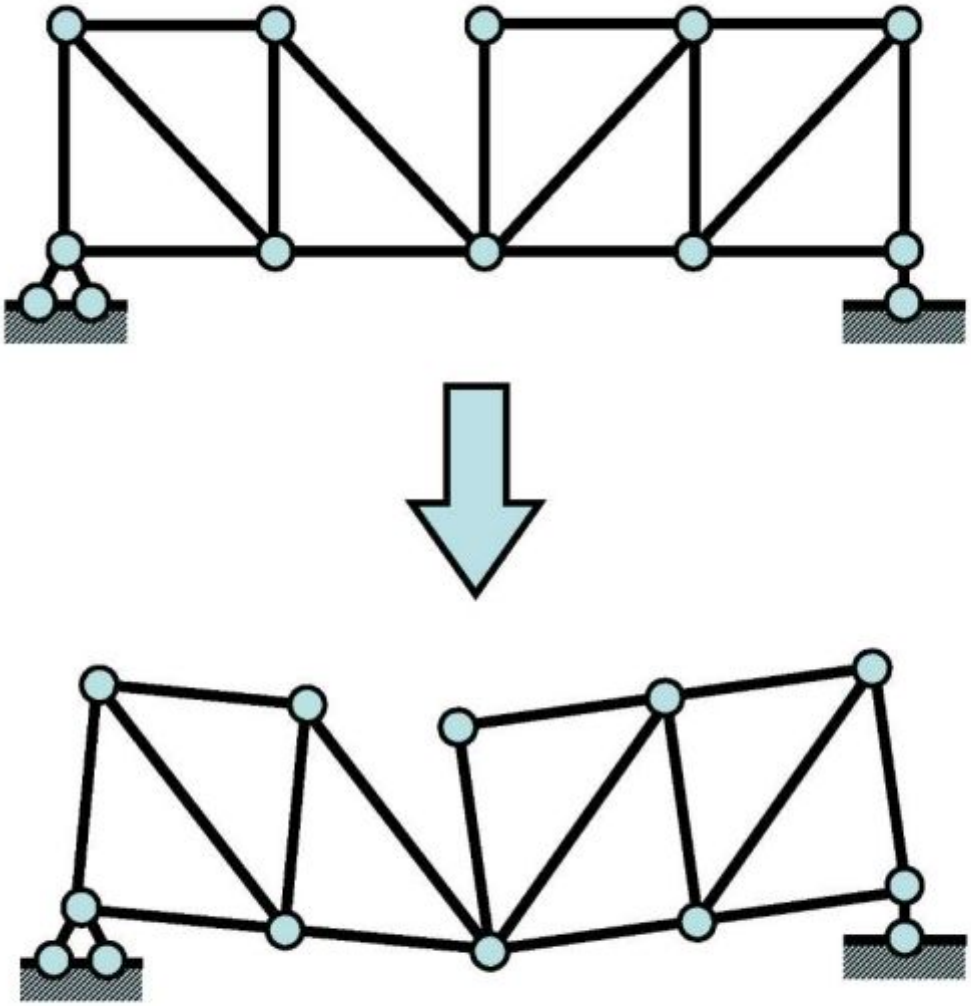
Статически определимая ферма



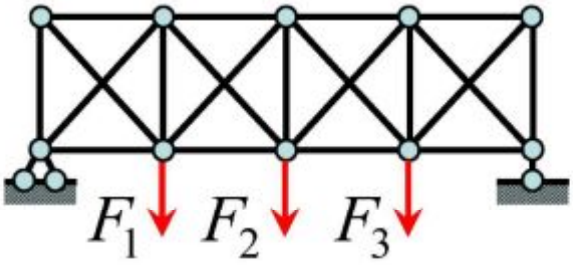
1. Определяем продольные силы
2. Находим наиболее напряженный стержень
3. Находим предельную нагрузку

$$\max \sigma = \frac{k \cdot F_{\text{пред}}}{A} = \sigma_{\text{T}}$$

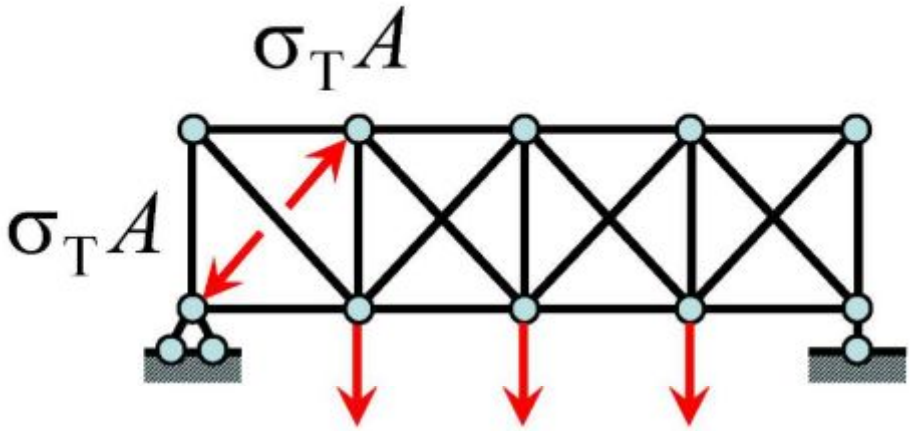
Разрушение



Статически неопределимая ферма



1. Определяем продольные силы
2. Находим наиболее напряженный стержень
3. Удаляем стержень с заменой усилия на предельное



4. Определяем продольные силы

5. Удаляем следующий стержень

Количество «лишних связей»

$$Л = С + С_О - 2У$$

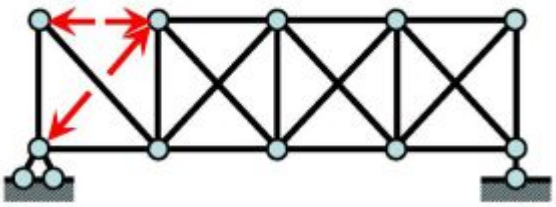
Удалять можно $Л + 1$ стержень

$$С = 21$$

$$С_О = 3$$

$$У = 10$$

$$Л = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4$$



Разрушение может произойти и ранее, чем потекут все «лишние» стержни

Сколько вариантов нужно рассмотреть для фермы?

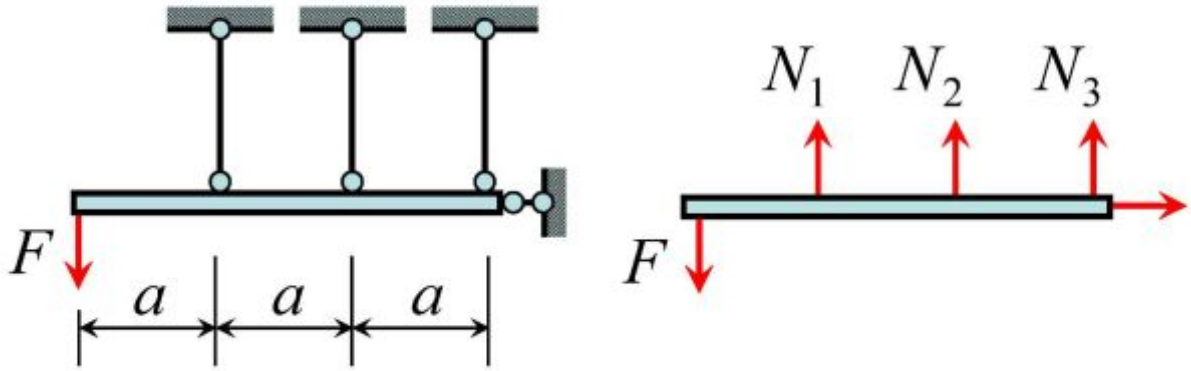
$$n = \text{С} = 21$$

$$r = \text{Л} + 1 = 5$$

$$C_{21}^{5} = \frac{21!}{5!(21-5)!} = \frac{21!}{5! \times 16!} =$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2441880}{120} = 20349$$

Два метода решения задач предельного равновесия

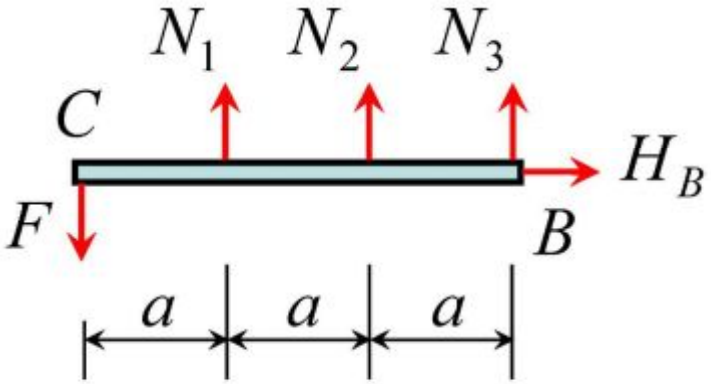


Статическая теорема

Нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию, меньше, чем предельная

Предельная нагрузка – наибольшая нагрузка, при которой возможно равновесие системы

Статический метод



$$A_1 = 3A$$

$$A_2 = 2A$$

$$A_3 = A$$

$$\sum m(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + 2N_2 + 3N_3 = 0 \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad \Rightarrow \quad F = N_1 + N_2 + N_3 \quad (2)$$

Вариант № 1

$$N_2 = \begin{cases} \sigma_T 2A \\ -\sigma_T 2A \end{cases} \qquad N_3 = \begin{cases} \sigma_T A \\ -\sigma_T A \end{cases}$$

1) $N_1 + 2\sigma_T 2A + 3\sigma_T A = 0$

$N_1 = -7\sigma_T A$ этот вариант невозможен

2) $N_1 - 2\sigma_T 2A - 3\sigma_T A = 0$

$N_1 = 7\sigma_T A$ этот вариант невозможен

3) $N_1 + 2\sigma_T 2A - 3\sigma_T A = 0$

$N_1 = -\sigma_T A$

$F_1 = \quad -\sigma_T A + 2\sigma_T A - \sigma_T A = 0$

4) $N_1 - 2\sigma_T 2A + 3\sigma_T A = 0$

$N_1 = \sigma_T A$

$F_1 = \ldots \ 0$

Вариант № 2

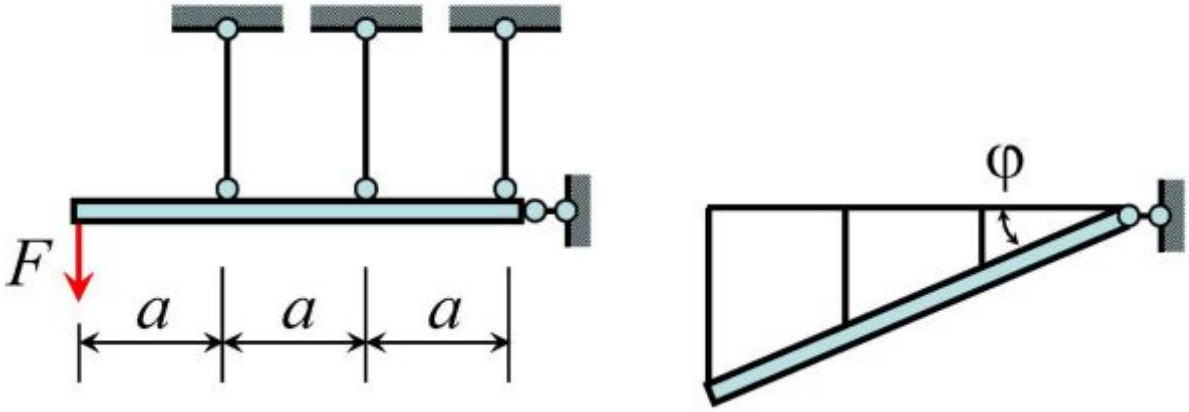
$$N_1 = \pm\sigma_T 3A \qquad N_3 = \pm\sigma_T A \qquad F_2 = 2\sigma_T A$$

Вариант № 3

$$N_1 = \pm\sigma_T 3A \qquad N_2 = \pm\sigma_T 2A \qquad F_3 = 1{,}333\sigma_T A$$

$$F_{\text{пред}} = \max \begin{cases} 0 \\ 2\sigma_T A \\ 1{,}333\sigma_T A \end{cases} \qquad \boxed{F_{\text{пред}} = 2\sigma_T A}$$

Кинематическая теорема

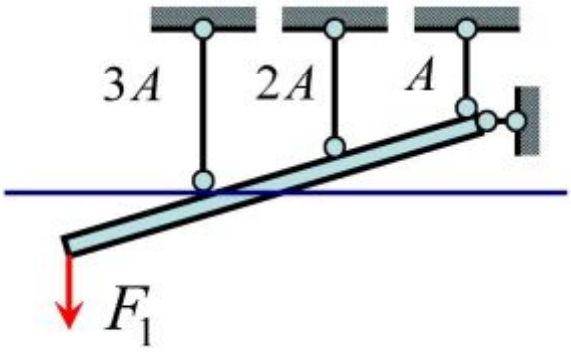


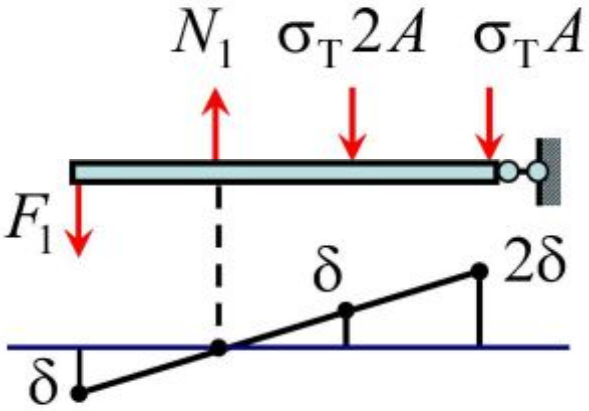
Нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию, больше, чем предельная

Предельная нагрузка – наименьшая нагрузка, при которой система представляет собой механизм

Кинематический метод

Вариант № 1





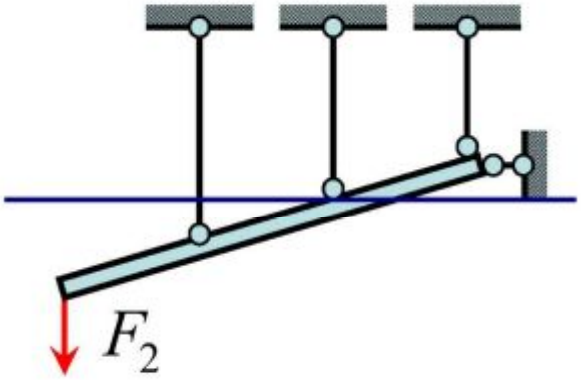
Уравнение работ

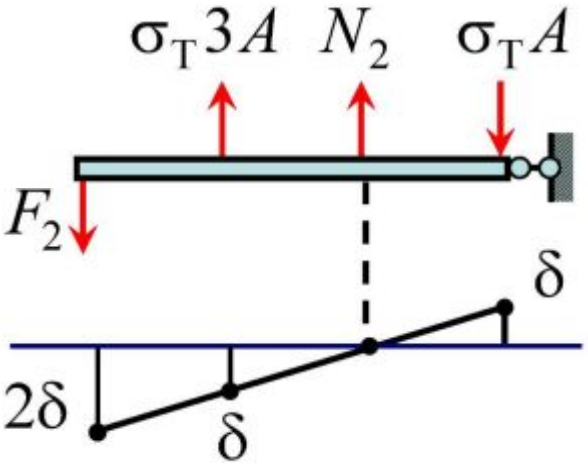
$$F_1 \cdot \delta = \sigma_T 2A \cdot \delta + \sigma_T A \cdot 2\delta$$

$$F_1 = 4\sigma_T A \qquad \sum y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = 7\sigma_T A$$

Вариант невозможен

Вариант № 2



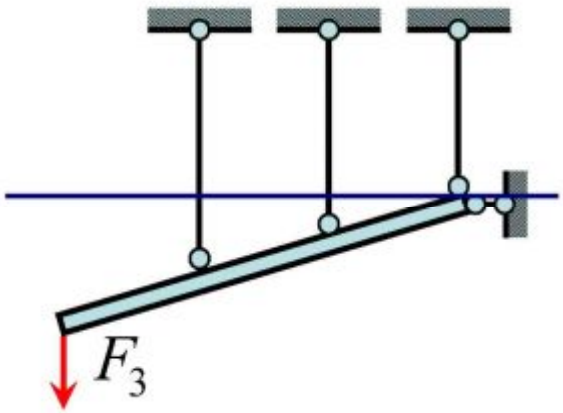


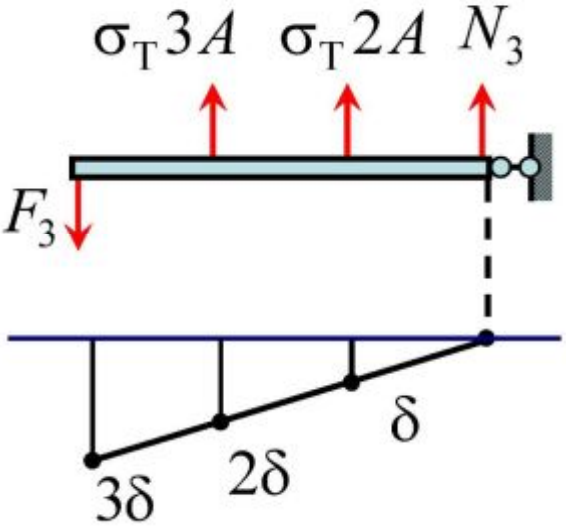
Уравнение работ

$$F_2 \cdot 2\delta = \sigma_T 3A \cdot \delta + \sigma_T A \cdot \delta$$

$$F_2 = 2\sigma_T A \qquad \sum y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_2 = 0$$

Вариант № 3





Уравнение работ

$$F_3 \cdot 3\delta = \sigma_T 3A \cdot 2\delta + \sigma_T 2A \cdot \delta$$

$$F_3 = 2{,}667\sigma_T A \qquad \sum y = 0 \quad N_3 = -2{,}333\sigma_T A$$

Вариант невозможен

Кинематический метод

$$F_{\text{пред}} = 2\sigma_{\text{Т}} A$$

Результаты по обоим методам совпали

Решение кинематическим методом проще

Использование линейного программирования

Задача линейного программирования (ЛП)

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \max$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots + a_{in}x_n + b_i \le 0$$

$$i = 1,2,\ldots m$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad \ldots \qquad x_n \ge 0$$

Задача ЛП:

Требуется найти максимум функции $F(N_1, N_2, N_3)$

$$F = N_1 + N_2 + N_3 \quad \rightarrow \quad \max$$

При выполнении условий

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 = 0$$

$$|N_1| \le N_{1,\text{пред}} \quad \Rightarrow \quad -N_{1,\text{пред}} \le N_1 \le N_{1,\text{пред}}$$

$$|N_2| \le N_{2,\text{пред}} \qquad \cdots$$

$$|N_3| \le N_{3,\text{пред}}$$

Уменьшим количество неизвестных

$$N_1 = -2N_2 - 3N_3$$

$$F = -N_2 - 2N_3 \to \max$$

линии равного уровня (ЛРУ)

$$(1) -\sigma_T 2A \le N_2 \le \sigma_T 2A$$

$$(2) -\sigma_T A \le N_3 \le \sigma_T A$$

$$(3) -\sigma_T 3A \le -2N_2 - 3N_3 \le \sigma_T 3A$$

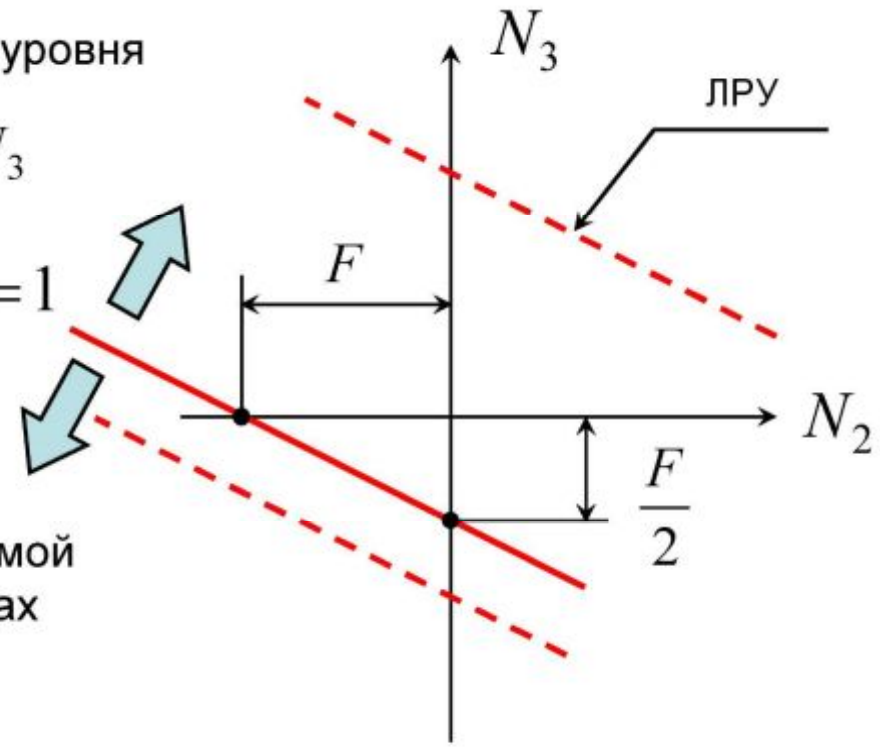
Область допустимых решений (ОДР)

Решение задачи ЛП графическим способом

Линии равного уровня

$$F = -N_2 - 2N_3$$

$$\frac{N_2}{-F} + \frac{N_3}{\frac{-F}{2}} = 1$$



Уравнение прямой линии в отрезках

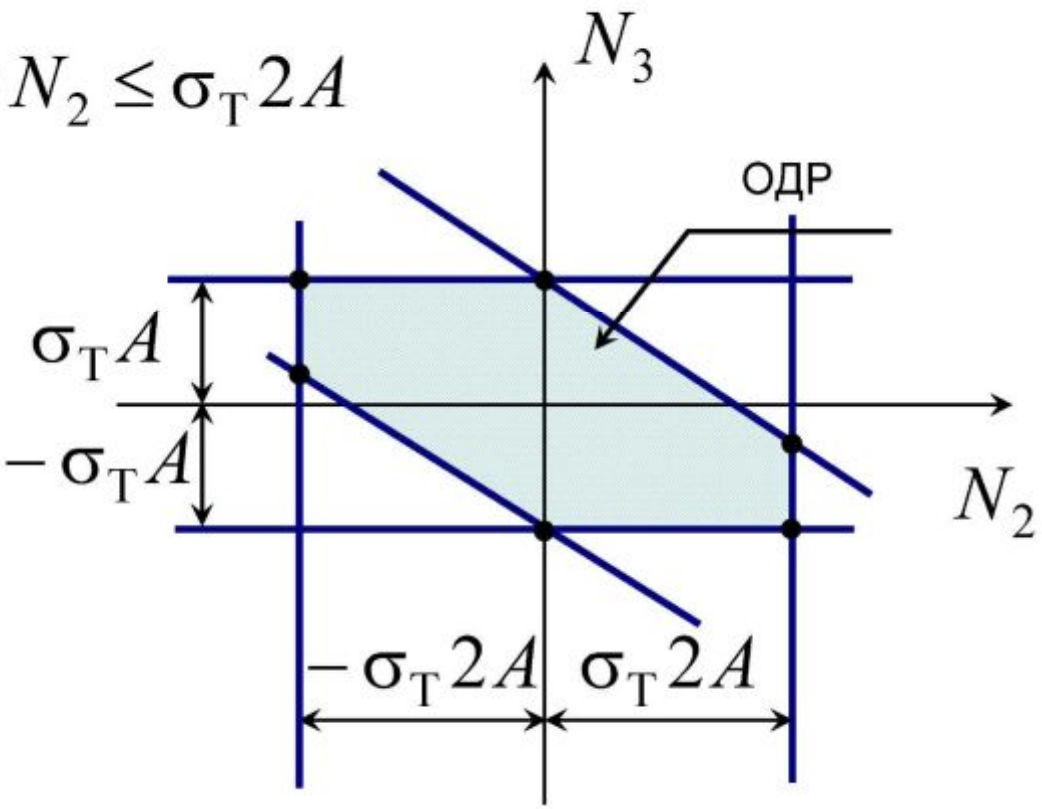
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

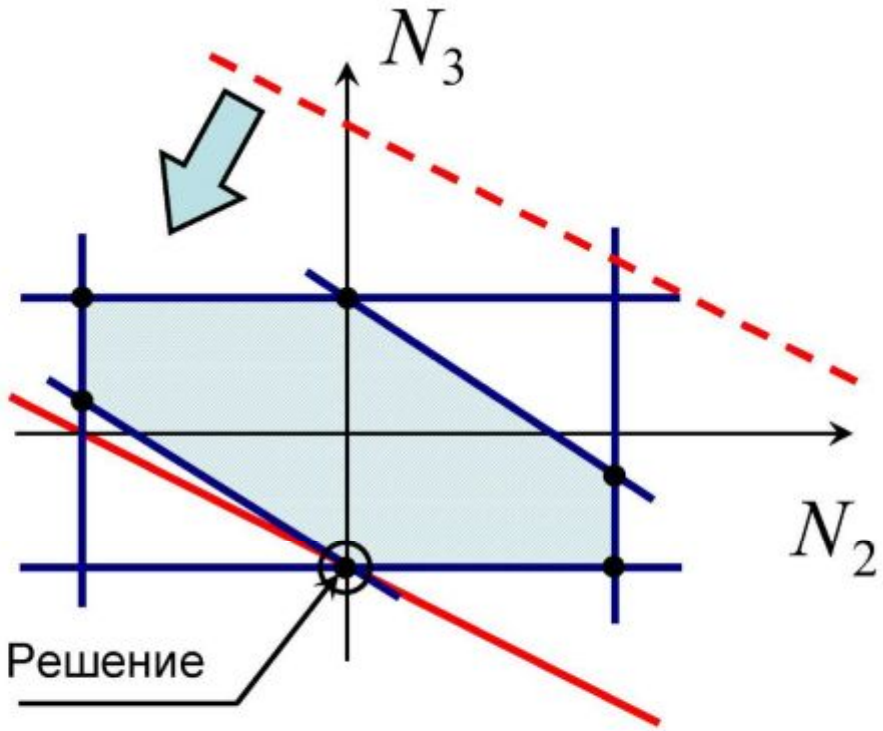
Область допустимых решений:

$(1.1) -\sigma_T 2A \le N_2$

$(1.2)\, N_2 \le \sigma_T 2A$

…

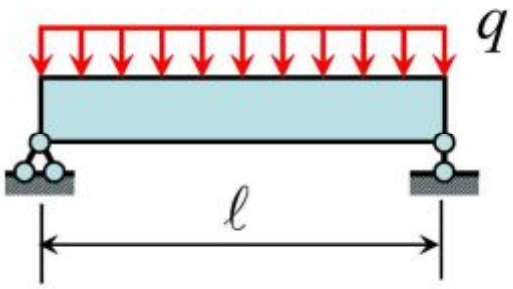




Ответ: $N_2 = 0 \qquad N_3 = -\sigma_T A$

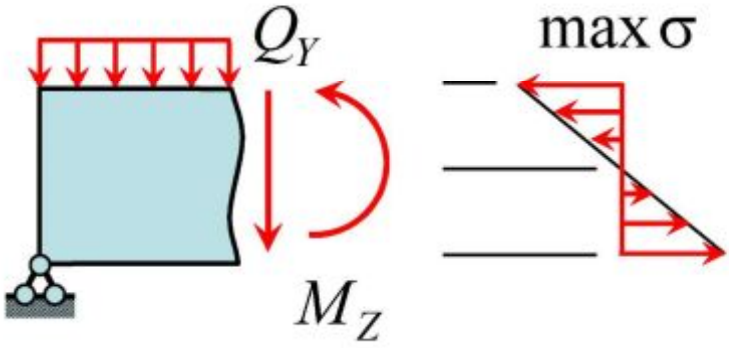
$$F_{\text{пред}} = -N_2 - 2N_3 = \ 2\sigma_T A$$

Расчет изгибаемых систем



Условие прочности при изгибе

$$\max\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} < R$$



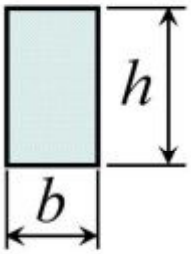
Гипотеза плоских сечений

Касательные напряжения не учитываются

$$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{8} \Rightarrow \frac{q\ell^2}{8} < R \cdot W_z \Rightarrow q < \frac{8R \cdot W_z}{\ell^2}$$

$$R = 24\,\text{кН/см}^2 \qquad \ell = 3\,\text{м} = 300\,\text{см}$$

Сечение - прямоугольник



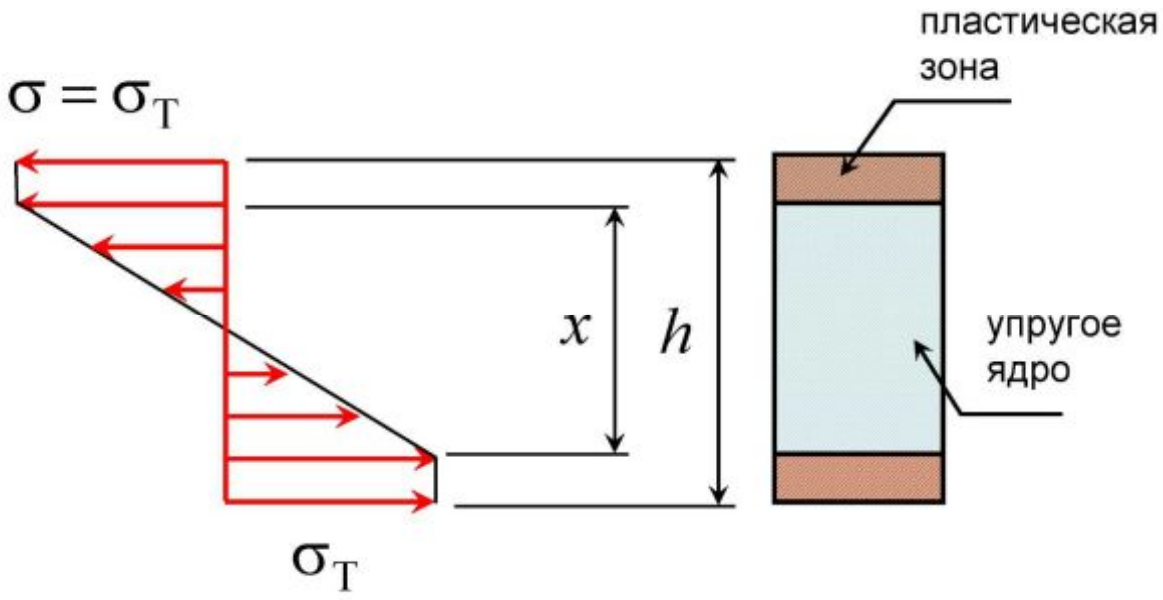
$$b = 10\,\text{см}$$

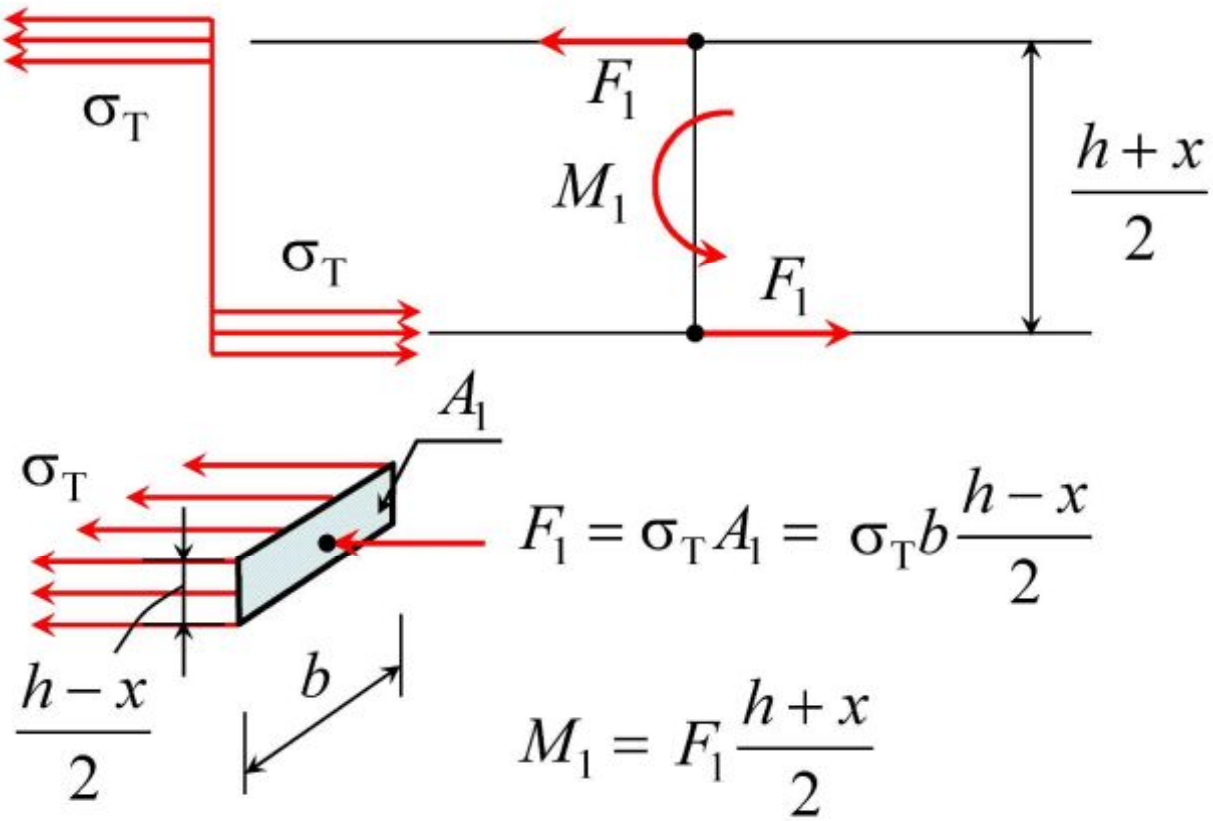
$$h = 30\,\text{см}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 30^2}{6} = 1500\,\text{см}^3$$

$$q = \frac{8 \cdot 24 \cdot 1500}{300^2} = 3{,}2 \text{ кН/см}$$

Вторая стадия работы (упруго-пластическая)





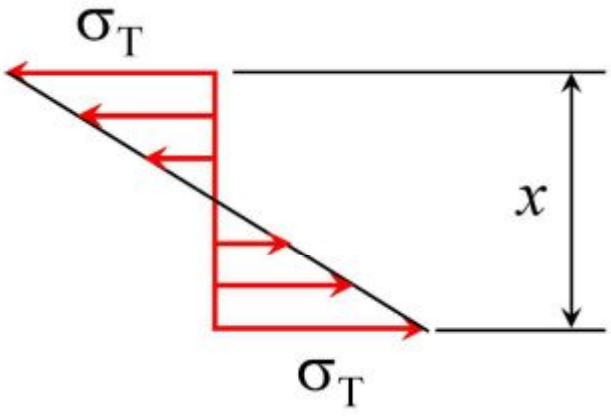
$$F_1 = \sigma_T A_1 = \sigma_T b \frac{h-x}{2}$$

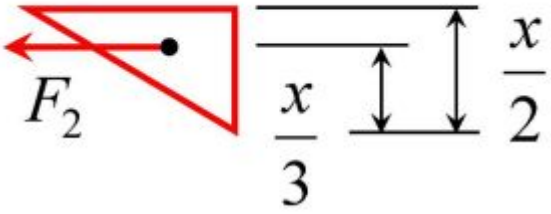
$$M_1 = F_1 \frac{h+x}{2}$$

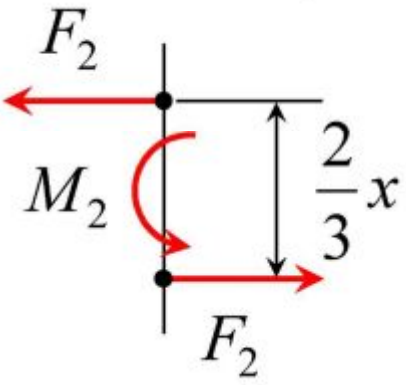
$$M_1 = F_1 \frac{h+x}{2}$$

$$F_1 = \sigma_T b \frac{h-x}{2}$$

$$M_1 = \sigma_T b \frac{h-x}{2} \cdot \frac{h+x}{2} = \frac{\sigma_T b}{4}\left(h^2 - x^2\right)$$







$$F_2 = \frac{1}{2}\sigma_T A_2 = \frac{1}{2}\sigma_T \frac{bx}{2}$$

$$M_2 = F_2 \frac{2}{3}x$$

$$M_2 = F_2 \frac{2}{3} x$$

$$F_2 = \frac{\sigma_T b}{4} x$$

$$M_2 = \frac{\sigma_T b}{4} x \cdot \frac{2}{3} x = \frac{\sigma_T b x^2}{6}$$

$$M_1 = \frac{\sigma_T b}{4}\left(h^2 - x^2\right)$$

$$M_2 = \frac{\sigma_T b x^2}{6}$$

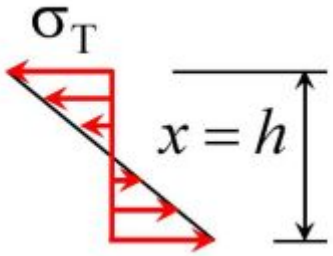
$$M = M_1 + M_2 = \ldots$$

$$M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - x^2\right)$$

$$M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - x^2\right)$$

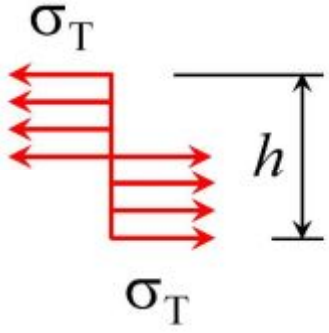
Анализ формулы

$$1)\ x = h \quad M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - h^2\right) = \frac{\sigma_T b h^2}{6} = \sigma_T W_z$$



$$M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - x^2\right)$$

2) $x = 0$ $\quad M_{пр} = \dfrac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - 0^2\right) = \dfrac{\sigma_T b h^2}{4} = \sigma_T W_T$



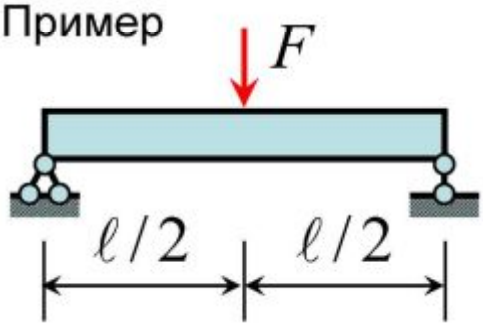
$$W_T = \frac{bh^2}{4}$$ пластический момент сопротивления

$$W_T = \frac{10 \cdot 30^2}{6} = 2250\,см^3$$

$$W_z = 1500\,см^3$$ Увеличение в 1,5 раза

$$M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - x^2\right) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{\sigma_T b}}$$

Пример



$F = 600$ кН

$\ell = 300$ см

$b = 10$ см $\qquad h = 30$ см

$\sigma_T = 24{,}5$ кН/см^2

$$M_{\max} = \frac{F\ell}{4} = \frac{600 \cdot 300}{4} = 45000 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

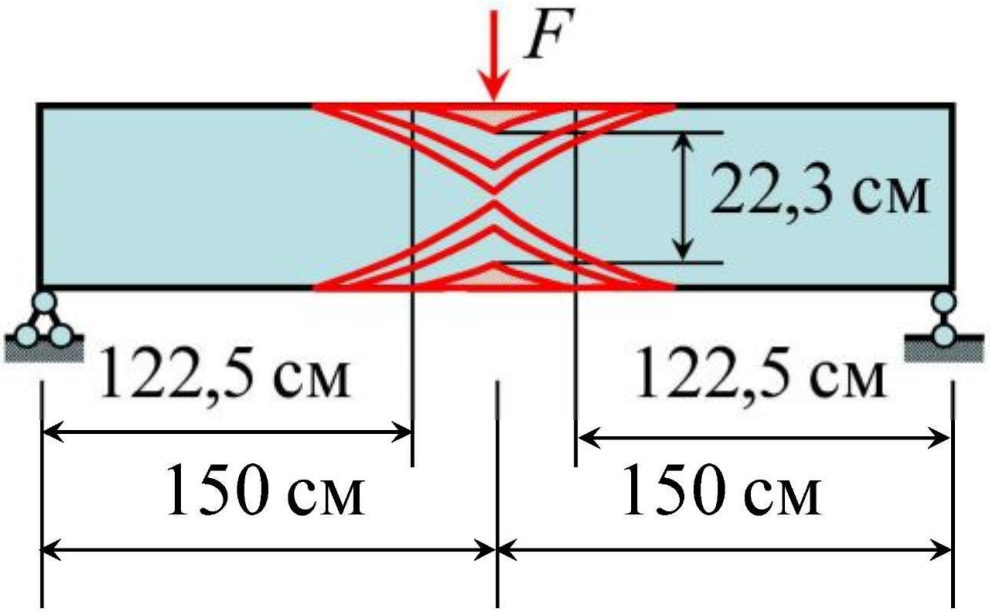
$$x = \sqrt{3(30)^2 - \frac{12 \cdot 45000}{24{,}5 \cdot 10}} = 22{,}3 \text{ см}$$

$$x = h \qquad M = \frac{\sigma_T b}{12}\left(3h^2 - h^2\right) = \frac{\sigma_T b h^2}{6} =$$

$$= \frac{24{,}5 \cdot 10 \cdot 30^2}{6} = 36750 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

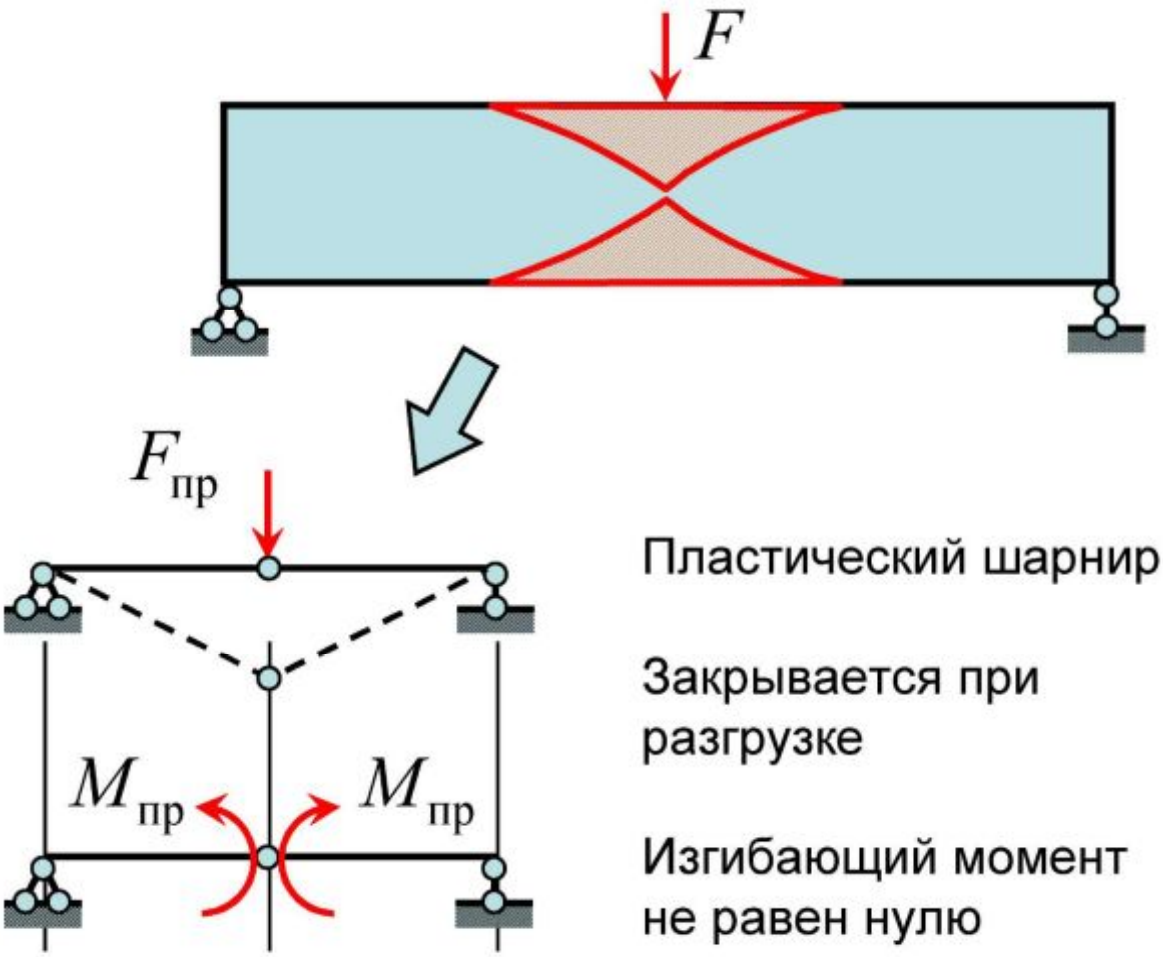
$$M = V_A \cdot a = \frac{F}{2}a \qquad a = \frac{2M}{F}$$

$$a = 122{,}5 \text{ см}$$



$F = 720$ кН $\quad x = 7{,}4$ см $\quad a = 102$ см

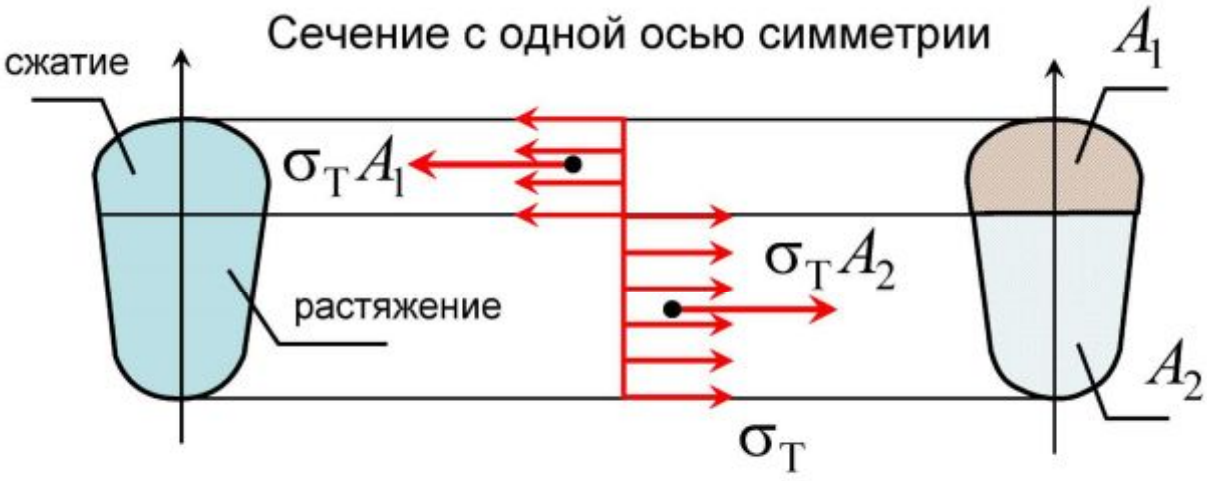
$F = 732$ кН $\quad x = 3{,}3$ см $\quad a = 100$ см



Пластический шарнир

Закрывается при разгрузке

Изгибающий момент не равен нулю



$$N = 0 \qquad \int_{A_1} \sigma_T dA_1 - \int_{A_2} \sigma_T dA_2 = 0$$

$$\sigma_T \int_{A_1} dA_1 = \sigma_T \int_{A_2} dA_2 \qquad \boxed{A_1 = A_2}$$

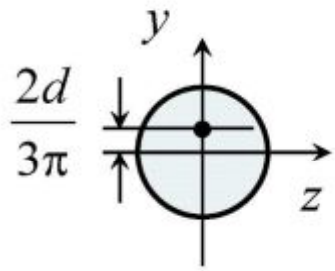
$$M_{\text{пр}} = \int_{A_1} \sigma_T y dA_1 + \int_{A_2} \sigma_T y dA_2 =$$

$$= \sigma_T \left[\int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y dA_2 \right] = \sigma_T [S_{z1} + S_{z2}] = \sigma_T W_T$$

Сечение с двумя осями симметрии

$$S_{z1} = S_{z2} \quad \Rightarrow \quad W_T = 2S_z$$

Круг



$$S_z = A \cdot y_C = \frac{\pi d^2}{8}\frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{12}$$

$$W_{\text{T}} = 2S_z = \frac{d^3}{6} \qquad W_Z = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$\frac{W_{\text{T}}}{W_Z} = 1{,}7$$

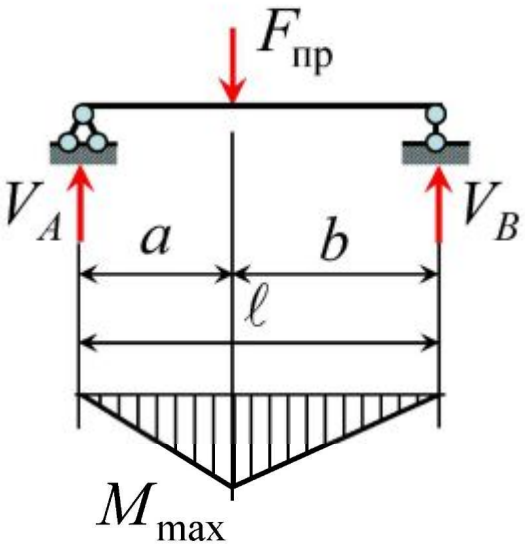
Двутавровое сечение

№	W_Z	S_Z	W_{T}	W_{T}/W_z
20	184	104	208	1,130
40	953	545	1090	1,144
60	2560	1491	2982	1,165

1,13

1,17

Определение предельной нагрузки для статически определимых балок



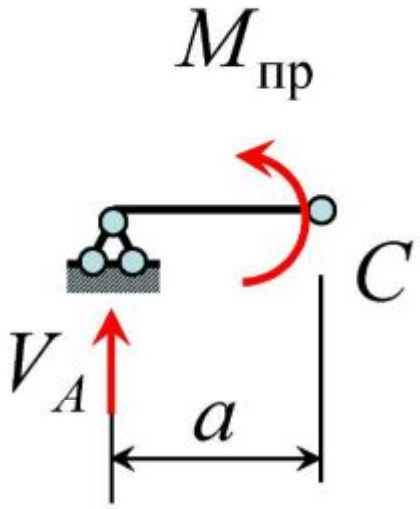
$$\sum m_{(B)} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{b}{\ell} F_{пр}$$

$$\sum m_{(A)} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{a}{\ell} F_{пр}$$

$$M_{max} = V_A \cdot a = \frac{ab}{\ell} F_{пр}$$

$$\frac{ab}{\ell} F_{пр} = M_{пр} \Rightarrow \boxed{F_{пр} = \frac{\ell}{ab} M_{пр}}$$

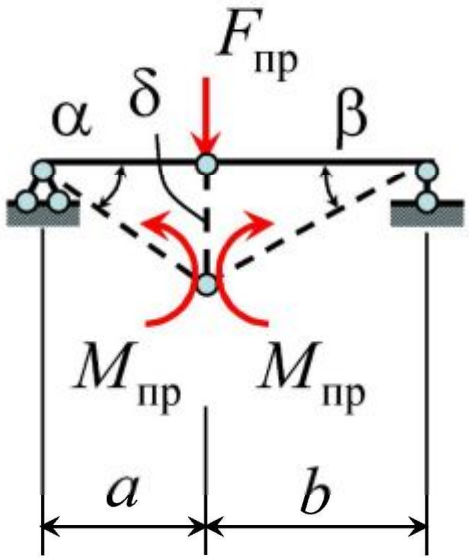
Статический метод



$$\sum m_{(C)} = 0 \qquad V_A \cdot a - M_{\text{пр}} = 0$$

$$M_{\text{пр}} = V_A \cdot a = \frac{ab}{\ell} F_{\text{пр}}$$

Кинематический метод



Уравнение работ

$$F_{пр}\delta = M_{пр}\alpha + M_{пр}\beta$$

$$\alpha = \frac{\delta}{a} \qquad \beta = \frac{\delta}{b}$$

$$F_{пр}\delta = M_{пр}\frac{\delta}{a} + M_{пр}\frac{\delta}{b}$$

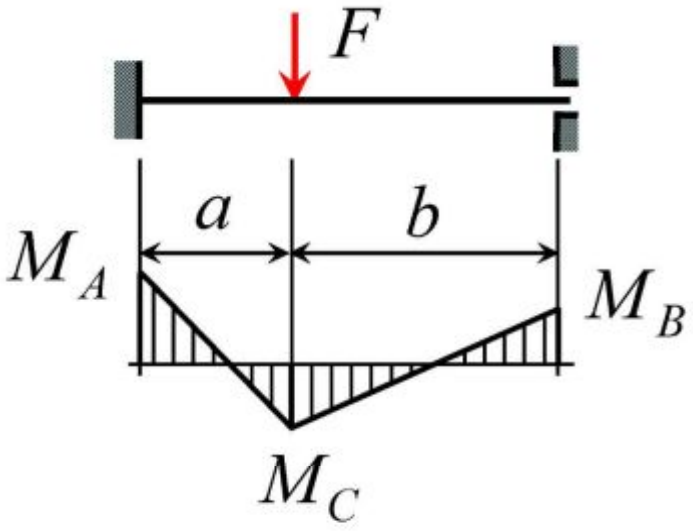
$$F_{\text{пр}}\delta = M_{\text{пр}}\frac{\delta}{a} + M_{\text{пр}}\frac{\delta}{b}$$

$$F_{\text{пр}}\delta = M_{\text{пр}}\delta \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$F_{\text{пр}} = M_{\text{пр}}\frac{a+b}{ab} \qquad F_{\text{пр}}\frac{ab}{\ell} = M_{\text{пр}}$$

Результаты по всем методам совпали

Определение предельной нагрузки для статически неопределимых балок

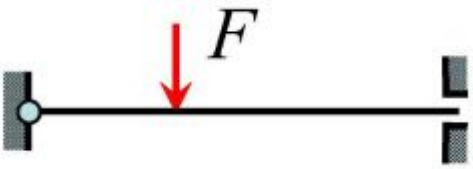


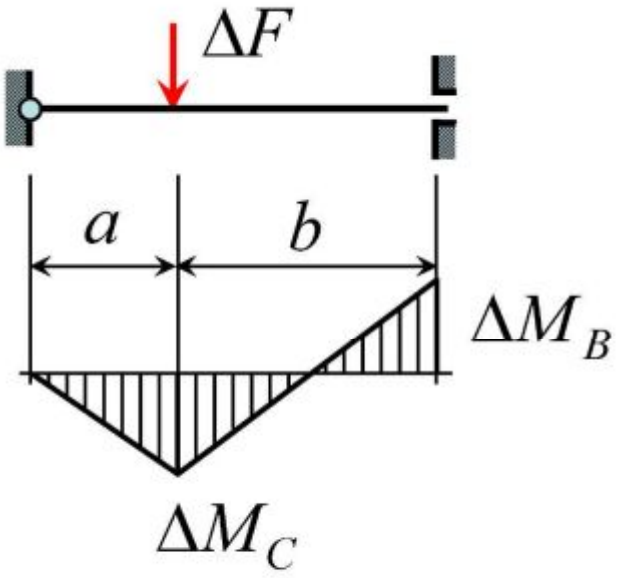
$$M_A = F\frac{ab^2}{\ell^2}$$

$$M_B = F\frac{a^2b}{\ell^2}$$

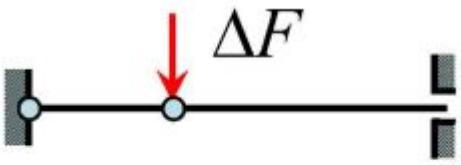
$$M_C = F\frac{2a^2b^2}{\ell^3}$$

$$M_A > M_C > M_B$$

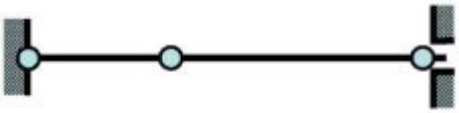


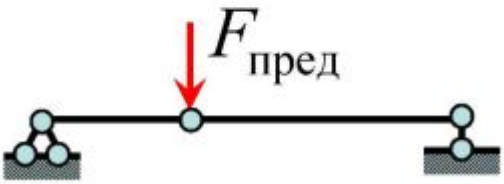


$\Delta M_C > \Delta M_B$

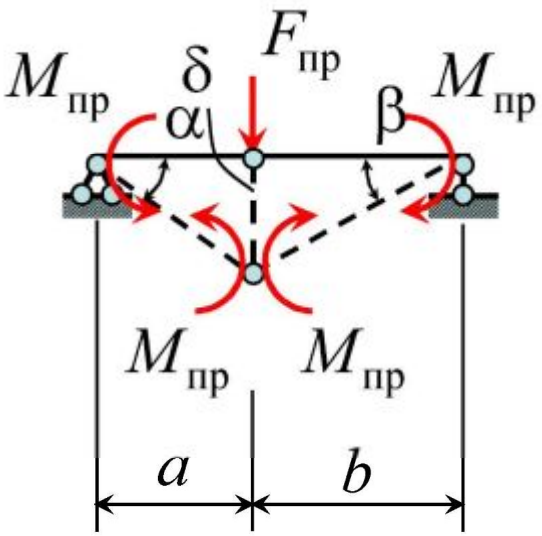


Разрушение





Кинематический метод



Уравнение работ

$$F_{пр}\delta = 2M_{пр}\alpha + 2M_{пр}\beta$$

$$F_{пр} = 2M_{пр}\frac{a+b}{ab}$$

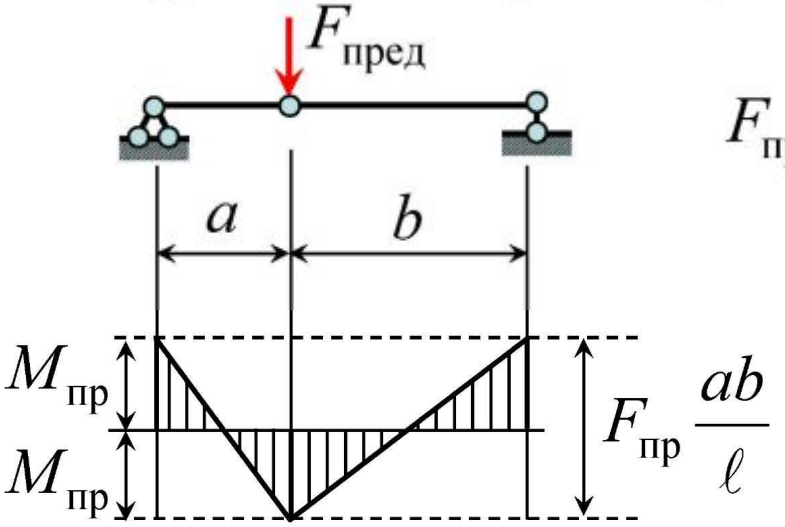
Статически определимая балка

$$F_{пр} = M_{пр}\frac{a+b}{ab}$$

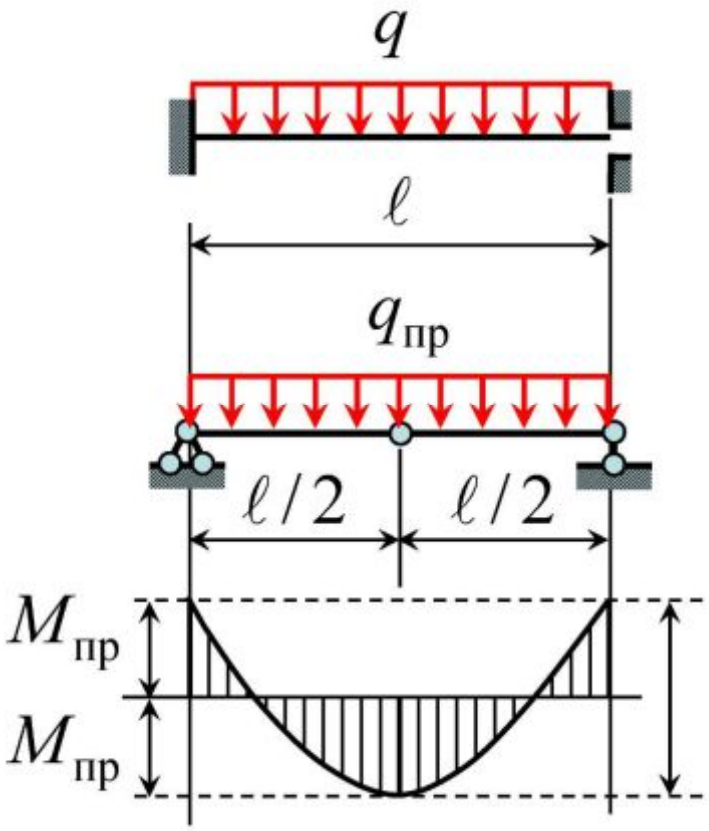
Увеличение в два раза

В предельном состоянии

$$M_A = M_C = M_B = M_{\text{пр}}$$

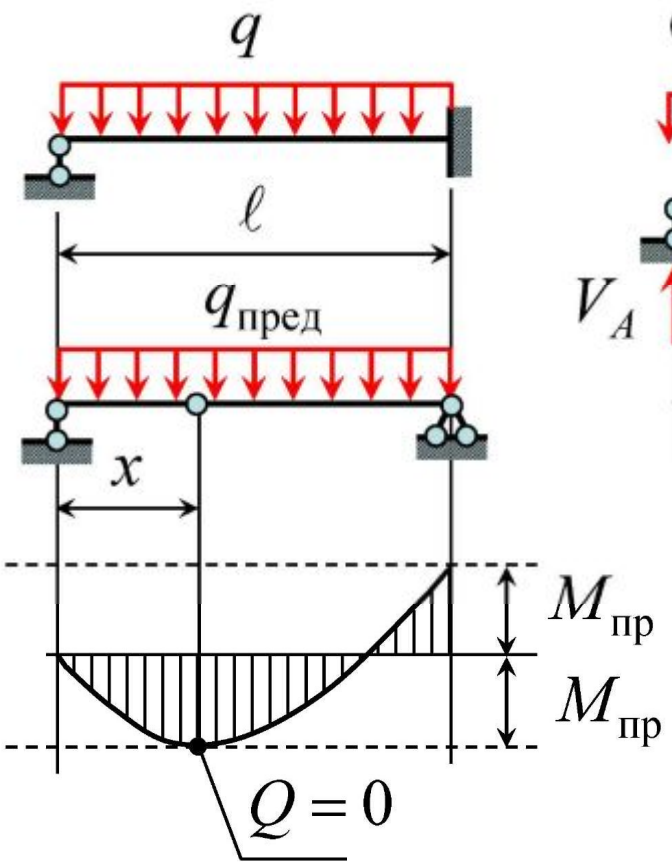


$$F_{\text{пр}} \frac{ab}{\ell} \times \frac{1}{2} = M_{\text{пр}}$$

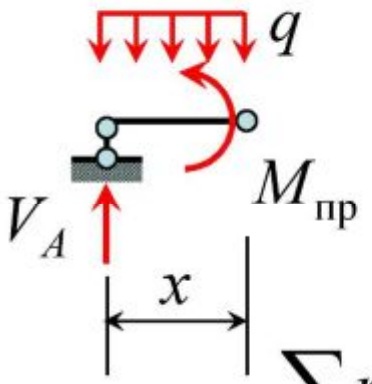


$$\frac{q_{пр}\ell^2}{8}\times\frac{1}{2}=M_{пр}$$

$$q_{пр}=\frac{16M_{пр}}{\ell^2}$$



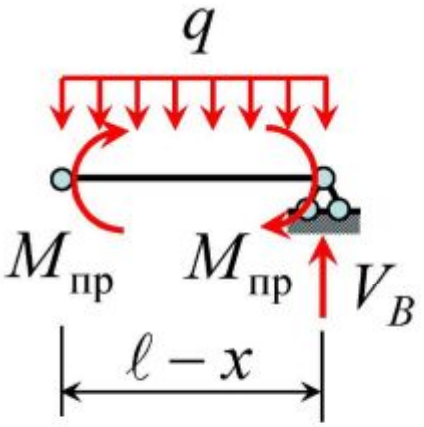
Статический метод



$$\sum m_{(A)} = 0$$

$$\frac{qx^2}{2} - M_{пр} = 0$$

$$M_{пр} = \frac{qx^2}{2}$$



$$\sum m_{(B)} = 0$$

$$M_{пр} + M_{пр} - \frac{q(\ell - x)^2}{2} = 0$$

$$\frac{qx^2}{2} + \frac{qx^2}{2} - \frac{q(\ell - x)^2}{2} = 0$$

$$2x^2 - (\ell - x)^2 = 0$$

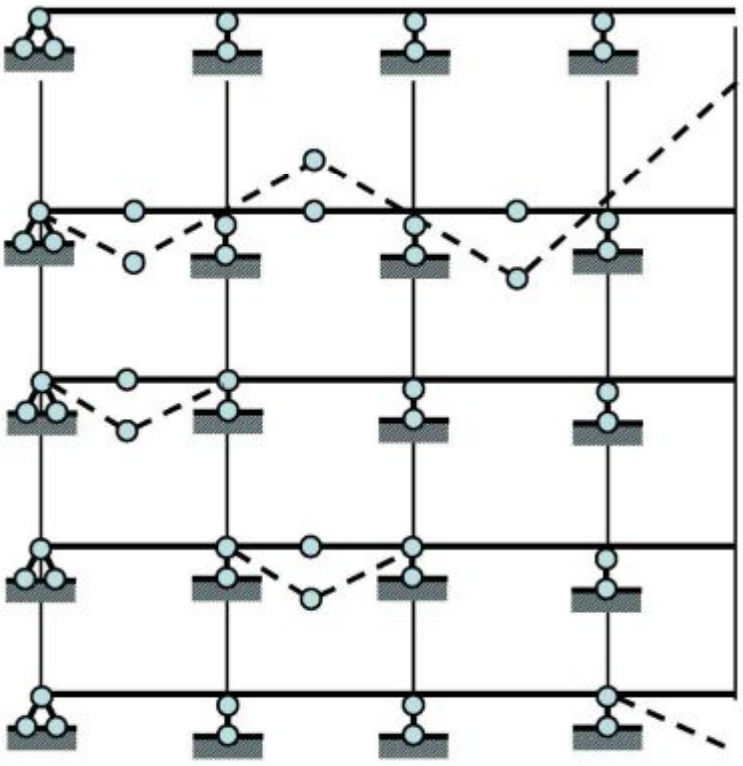
$$x^2 + 2\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\boxed{x = 0{,}414\ell}$$

$$M_{пр} = \frac{q(0{,}414\ell)^2}{2}$$

$$q_{пр} = \frac{11{,}67}{\ell^2} M_{пр}$$

Неразрезные балки



$$Л = 2$$

$$n = Л + 1 = 3$$

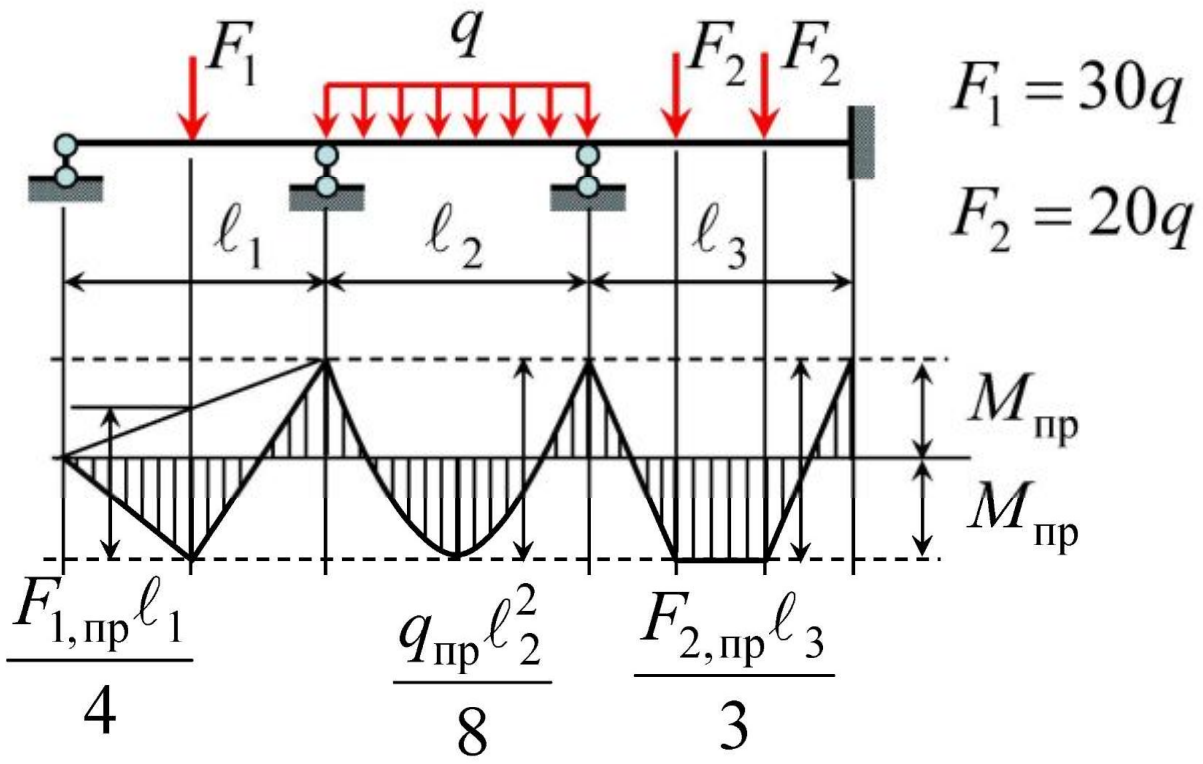
$$n = 2$$

$$n = 3$$

$$n = 1$$

$$1 \le n \le 3$$

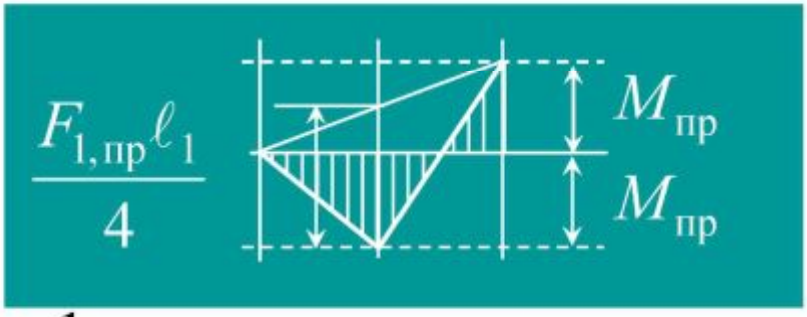
Балка постоянного по длине сечения



Двутавр № 40 $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 600$ см

$$M_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}} W_{\text{т}} = 24{,}5 \cdot 1090 = 26705 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

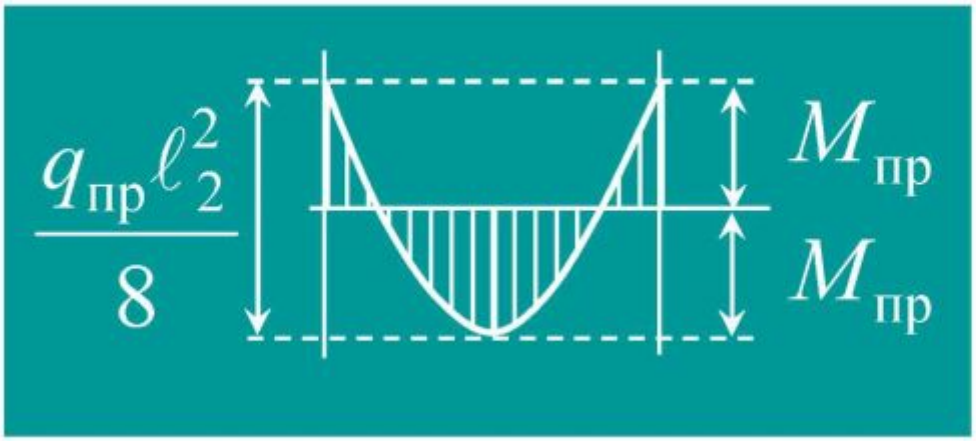
Пролет №1



$$\frac{F_{1,\text{пр}}\ell_1}{4} = M_{\text{пр}} + \frac{1}{2}M_{\text{пр}}$$

$$F_{1,\text{пр}} = \frac{3}{2}M_{\text{пр}}\frac{4}{\ell_1} = \frac{6 \cdot 26705}{600} = 267 \text{ кН}$$

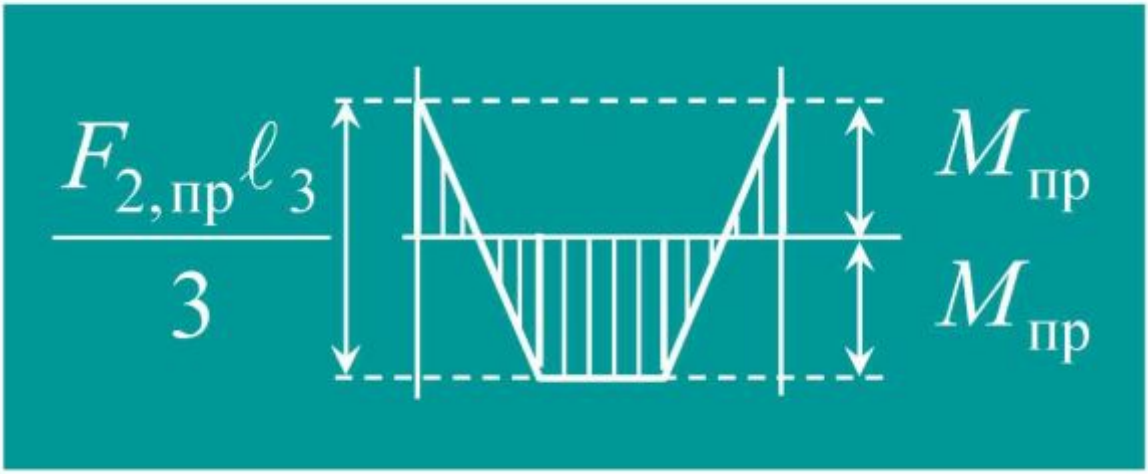
Пролет № 2



$$\frac{q_{\text{пр}}\ell_2^2}{8} = 2M_{\text{пр}}$$

$$q_{\text{пр}} = \frac{16M_{\text{пр}}}{\ell_2^2} = \quad \ldots \quad = 1{,}2 \text{ кН/см}$$

Пролет № 3



$$\frac{F_{2,\text{пр}}\ell_3}{3} = 2M_{\text{пр}}$$

$$F_{2,\text{пр}} = \frac{6M_{\text{пр}}}{\ell_3} = \ \ldots \ \ 267\ \text{кН}$$

$$F_{1,\text{пр}} = F_{2,\text{пр}} = 267 \text{ кН}$$

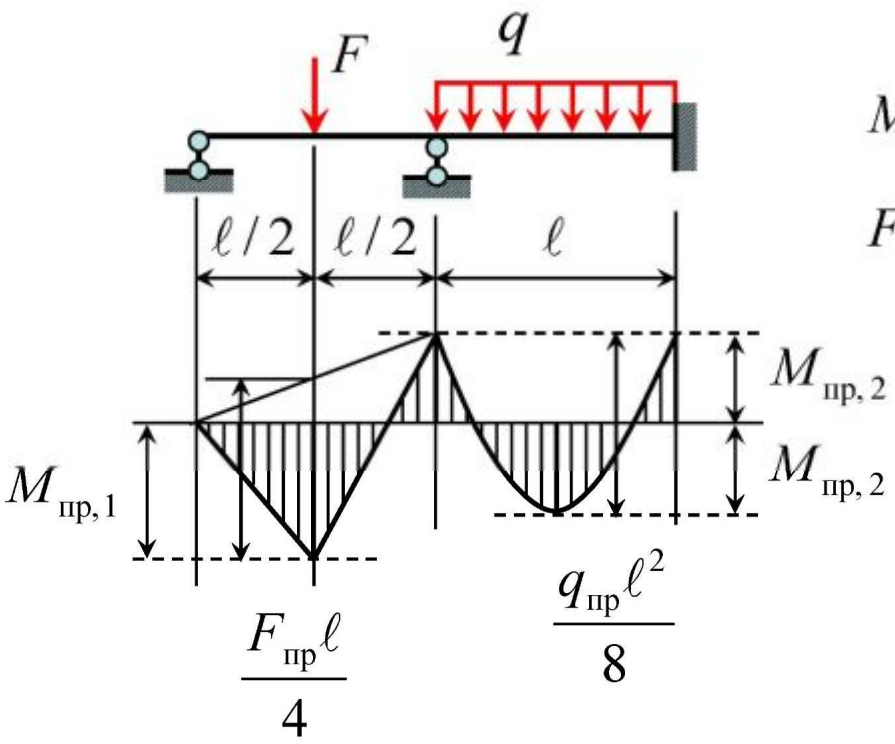
$$q_{\text{пр}} = 1{,}2 \text{ кН/см}$$

$$F_1 = 30q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{267}{30} = 8{,}9 \text{ кН/см}$$

$$F_2 = 20q \quad \Rightarrow \quad q = 13{,}4 \text{ кН/см}$$

$$q_{\text{пр}} = 1{,}2 \text{ кН/см} = 120 \text{ кН/м}$$

Балка переменного по длине сечения

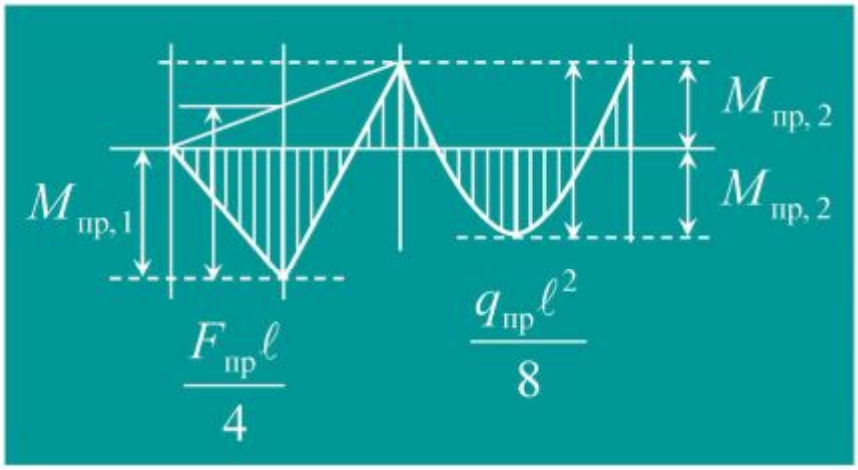


$$M_{\text{пр},1} = 1{,}5\, M_{\text{пр},2}$$

$$F = q\ell$$

$$\frac{q_{\text{пр}}\ell^2}{8} = 2M_{\text{пр, 2}}$$

$$q_{\text{пр}} = \frac{16M_{\text{пр, 2}}}{\ell^2}$$



$$\frac{F_{\text{пр}}\ell}{4} = M_{\text{пр, 1}} + 0{,}5M_{\text{пр, 2}} = 2M_{\text{пр, 2}}$$

$$F_{\text{пр}} = \frac{8M_{\text{пр, 2}}}{\ell} \qquad q_{\text{пр}}\ell = \frac{8M_{\text{пр, 2}}}{\ell}$$

$$q_{\text{пр}} = \min\left\{\begin{array}{l}\dfrac{16M_{\text{пр, 2}}}{\ell^2} \\ \dfrac{8M_{\text{пр, 2}}}{\ell^2}\end{array}\right.$$

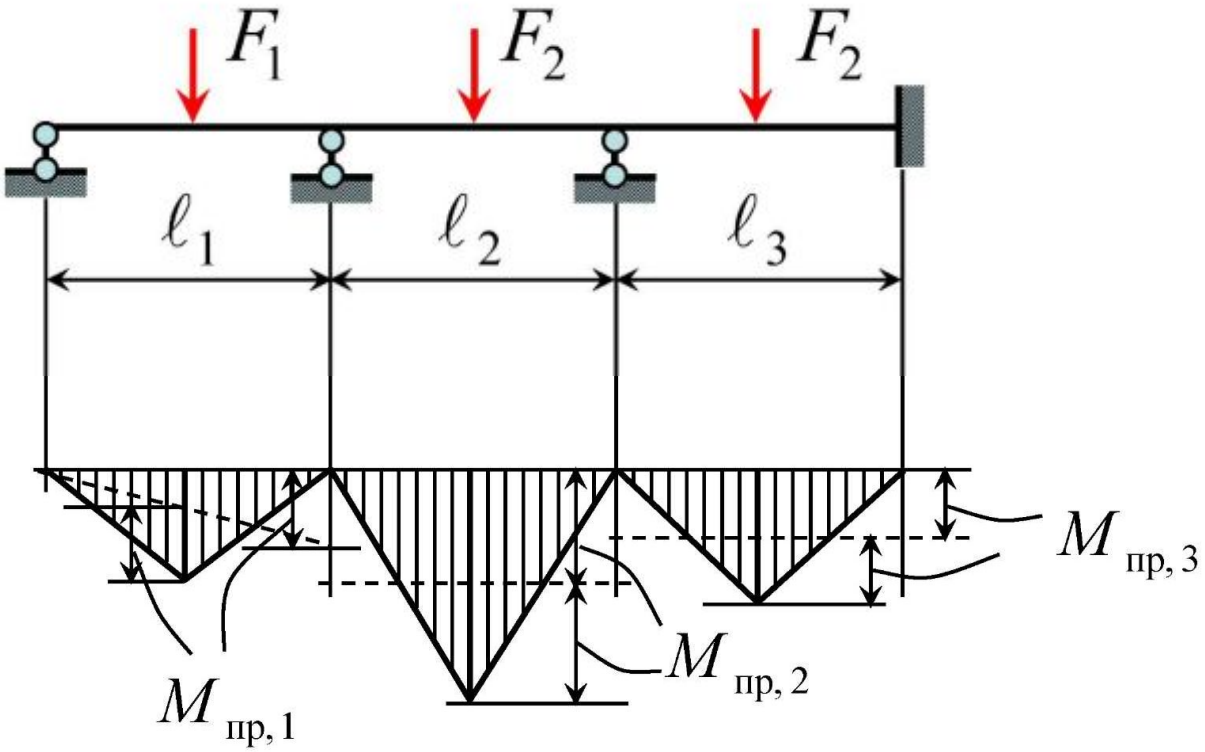
Подбор поперечного сечения балки

Порядок расчета

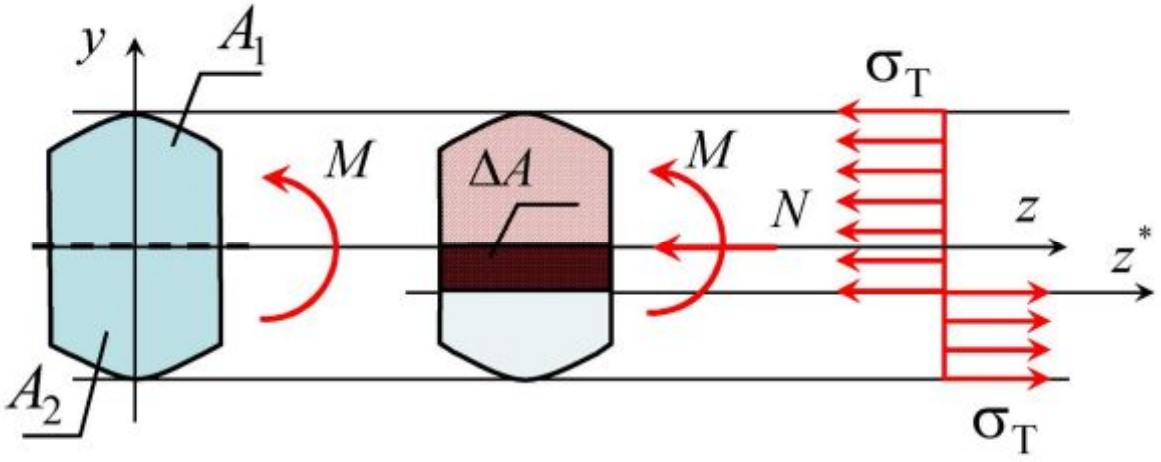
1. Строят эпюры моментов для каждого пролета как для разрезной балки

2. Выравнивают изгибающие моменты в каждом пролете

3. Подбирают сечение по максимальному из выровненных моментов


F1
F2
F2
ℓ1
ℓ2
ℓ3
M пр, 3
M пр, 2
M пр, 1

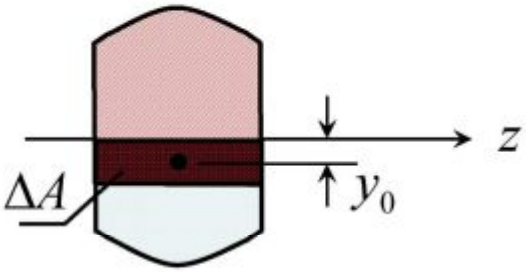
Учет действия продольной силы



1) $N = 0 \qquad A_1 = A_2 \qquad W_T = 2S_Z$

2) $N_{пр} = \sigma_T(A_1 + \Delta A) - \sigma_T(A_2 - \Delta A) = 2\sigma_T \Delta A$

$$\Delta A = \frac{N_{пр}}{2\sigma_T}$$ (продольная сила берется по модулю)



$$\Delta A = \frac{N_{\text{пр}}}{2\sigma_{\text{T}}}$$

$$M_{\text{пр}} = \int_{A_1+\Delta A} \sigma_{\text{T}} y dA + \int_{A_2-\Delta A} \sigma_{\text{T}} y dA = 2\sigma_{\text{T}}(A_2 y_2 - \Delta A y_0) =$$

$$= 2\sigma_{\text{T}} S_Z - 2\sigma_{\text{T}} \Delta A \cdot y_0 = \sigma_{\text{T}} W_{\text{T}} - N_{\text{пр}} \cdot y_0$$

$$\boxed{\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}} + \frac{N_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}} y_0 = W_{\text{T}}}$$

Сечение в форме прямоугольника

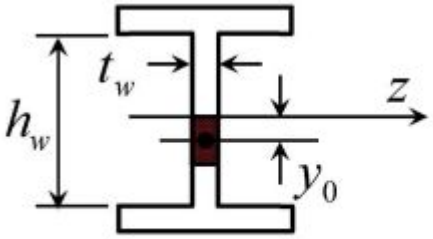
$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}+\frac{N_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}y_0=W_{\text{T}}$$

$$y_0=\frac{1}{2}\frac{\Delta A}{b}=\frac{N_{\text{пр}}}{4\sigma_{\text{T}}b}$$

$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}+\frac{N_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}\frac{N_{\text{пр}}}{4\sigma_{\text{T}}b}=W_{\text{T}}$$

$$\boxed{\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}+\left(\frac{N_{\text{пр}}}{2\sigma_{\text{T}}}\right)^2\frac{1}{b}=W_{\text{T}}}$$

Двутавр



$$y_0=\frac{1}{2}\frac{\Delta A}{t_w}\qquad 2y_0<\frac{h_w}{2}$$

$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}}+\left(\frac{N_{\text{пр}}}{2\sigma_{\text{T}}}\right)^2\frac{1}{t_w}=W_{\text{T}}$$

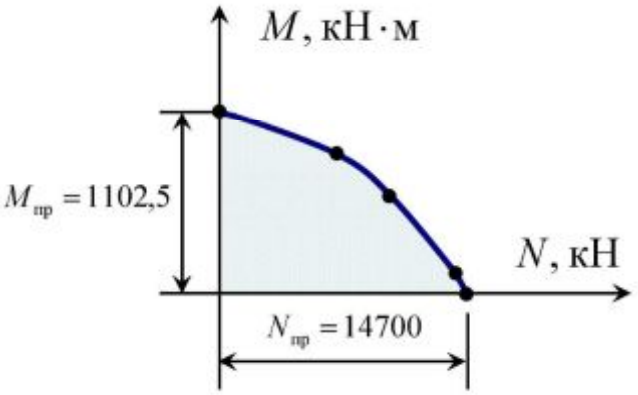
Пример $b = 20$ см $h = 30$ см $\sigma_T = 24{,}5$ кН/см^2

$N = (0,\ 7000,\ 10000,\ 14000,\ 14700)$ кН

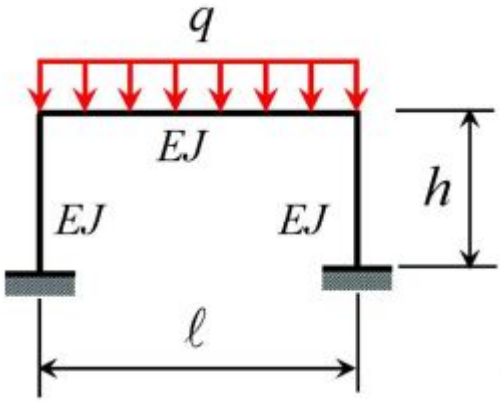
Определить $M_{пр}$

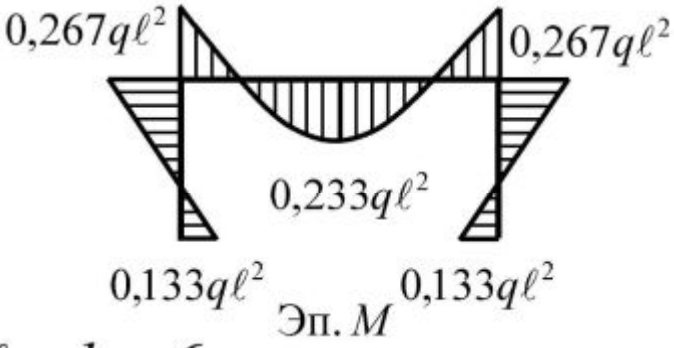
$$M_{пр} = \left[4500 - \left(\frac{0}{2 \cdot 24{,}5}\right)^2 \frac{1}{20}\right] \cdot 24{,}5 \cdot 10^{-2} = 1102{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

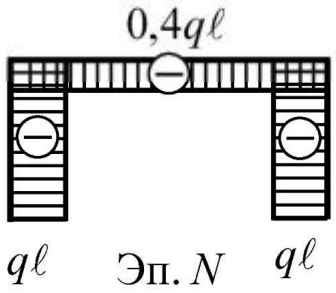
N	$M_{пр}$
0	1102,5
7000	852,5
10000	592,3
14000	102,5
14700	0



Анализ влияния продольной силы







$$\ell = h = 6 \text{ м}$$

$$q = 20 \text{ кН/м}$$

$$M_{\max} = 0{,}267 \cdot 20 \cdot 6^2 =$$

$$= 192{,}2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$N_{\max} = 20 \cdot 6 = 120 \text{ кН}$$

Двутавр № 30Ш1 $A = 68{,}3\ \text{см}^2$ $t_w = 0{,}8\ \text{см}$

$$W_\text{т} = 2 \cdot 398 = 796\ \text{см}^3 \qquad \sigma_\text{т} = 24{,}5\ \text{кН/см}^2$$

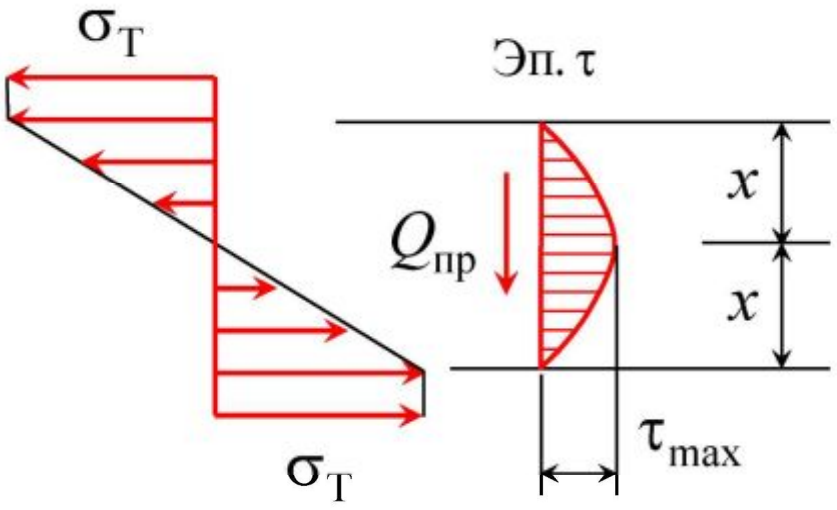
$$M_\text{пр} = 24{,}5 \cdot 796 = 19500\ \text{кН} \cdot \text{см} = 195\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$N_\text{пр} = 24{,}5 \cdot 68{,}3 = \ 1670\ \text{кН}$$

$$\frac{M_\text{пр}}{M_\text{max}} = 1{,}015 \qquad \frac{N_\text{пр}}{N_\text{max}} = 13{,}9$$

$$\frac{192{,}2 \cdot 10^2}{24{,}5} + \left(\frac{120}{2 \cdot 24{,}5}\right)^2 \frac{1}{0{,}8} = \ 786 + 7{,}5 \qquad < 1\%$$

Учет влияния поперечной силы



$$\tau = \frac{Q \cdot S_z}{J_z \cdot b}$$

$$S_z = A_{\text{отс}} \cdot y = bx \cdot \frac{x}{2} \qquad J_z = \frac{b(2x)^3}{12}$$

$$\tau_{max} = \ldots = \frac{3}{4}\frac{Q_{пр}}{bx} = \tau_т \qquad x = \frac{3}{4}\frac{Q_{пр}}{b \cdot \tau_т}$$

$$M_{пр} \approx \sigma_T W_T - \left[\frac{1}{2}\sigma_T \cdot b \cdot x \frac{1}{3}x\right] \cdot 2 =$$

$$= \sigma_T W_T - \frac{3}{16}\frac{Q_{пр}^2 \sigma_T}{b\tau_T^2}$$

$$\boxed{\frac{M_{пр}}{\sigma_T} + \frac{3}{16}\frac{Q_{пр}^2}{b\tau_T^2} = W_T}$$

Совместное действие изгибающего момента и поперечной силы

$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}} + \frac{3}{16}\frac{Q_{\text{пр}}^2}{b\tau_{\text{T}}^2} = W_{\text{T}}$$

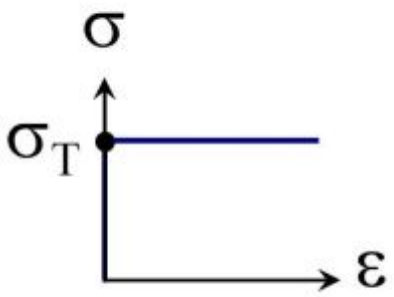
$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}} + \left(\frac{N_{\text{пр}}}{2\sigma_{\text{T}}}\right)^2 \frac{1}{b} = W_{\text{T}}$$

$$\frac{M_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{T}}} + \left(\frac{N_{\text{пр}}}{2\sigma_{\text{T}}}\right)^2 \frac{1}{b} + \frac{3}{16}\frac{Q_{\text{пр}}^2}{b\tau_{\text{T}}^2} = W_{\text{T}}$$

Расчет рам методом предельного равновесия

Основные положения, принятые при расчете

1. Материал конструкции идеальный жестко- пластический



$$\varepsilon_{упр} \approx 0$$

2. Количество и места образования пластических шарниров известны

3. Все нагрузки увеличиваются пропорционально одному параметру

4. При определении величины предельного изгибающего момента влиянием продольных и поперечных сил пренебрегают

$Л$ - степень статической неопределимости

n - число пластических шарниров

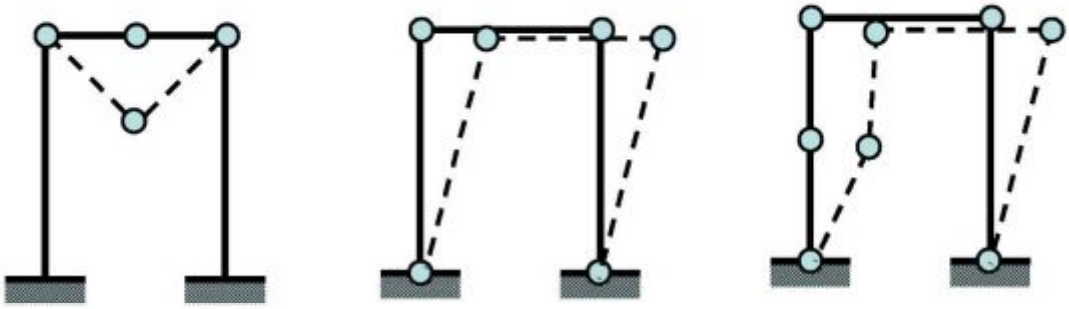
Различают три вида разрушения рамы:

- частичное $n < Л + 1$

- полное $n = Л + 1$

- избыточное $n > Л + 1$

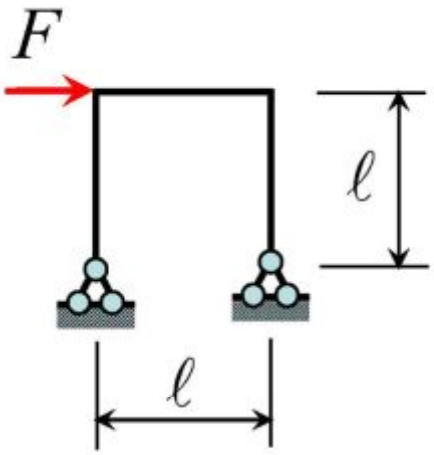
Примеры различных видов разрушения



частичное полное избыточное

Правило расположения пластических шарниров

Возможное Невозможное



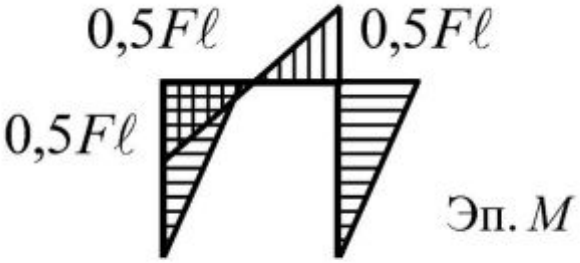
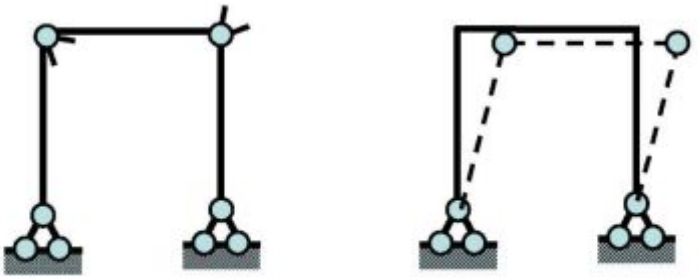
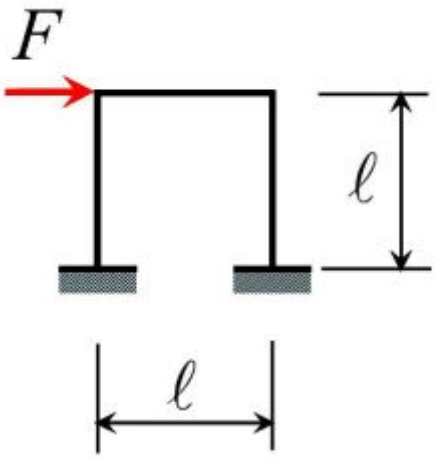


Схема разрушения





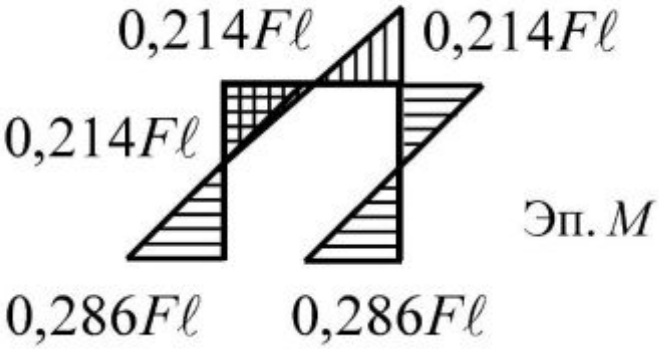
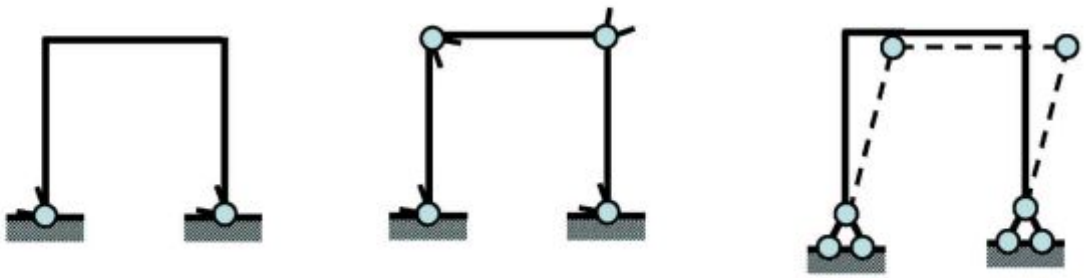


Схема разрушения



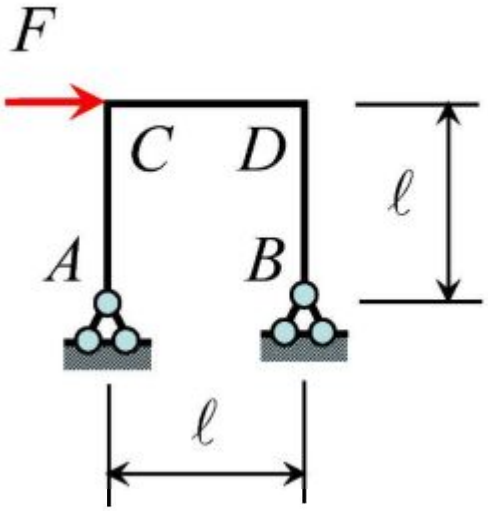
Порядок расчета

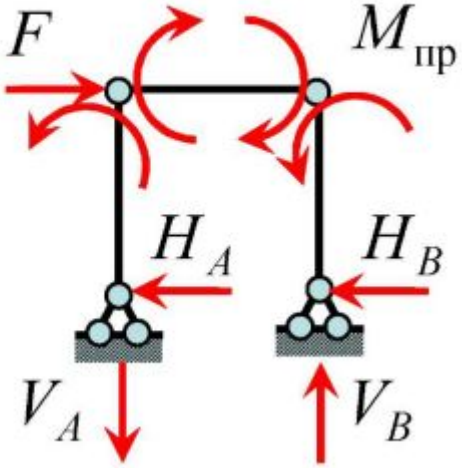
1. Намечают места образования пластических шарниров, исходя из особенностей задачи

2. Составляют условия равновесия для возможной схемы разрушения (статический метод). Из полученных значений выбирают максимальное

3. Составляют условия уравнения работ для возможной схемы разрушения (кинематический метод). Из полученных значений выбирают минимальное

Пример (статический метод)





$$\sum m_{(C)} = 0 \qquad H_A \ell - M_{пр} = 0$$

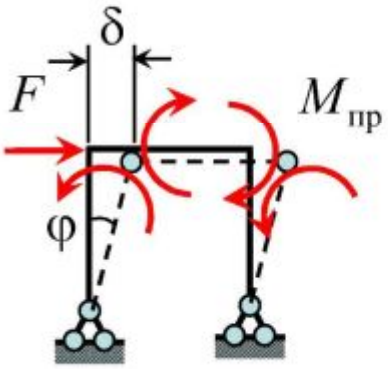
$$\sum m_{(D)} = 0 \qquad H_B \ell - M_{пр} = 0$$

$$H_A = H_B = \frac{M_{пр}}{\ell}$$

$$\sum x = 0 \qquad F - H_A - H_B = 0$$

$$F = H_A + H_B = \frac{2M_{\text{пр}}}{\ell}$$

Пример (кинематический метод)

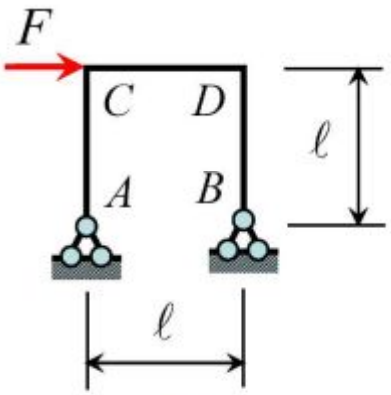


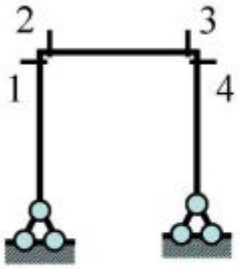
$$F \cdot \delta = M_{\text{пр}} \cdot \varphi + M_{\text{пр}} \cdot \varphi$$

$$\varphi = \frac{\delta}{\ell}$$

$$F \cdot \delta = 2M_{\text{пр}} \frac{\delta}{\ell} \qquad F = \frac{2M_{\text{пр}}}{\ell}$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЛП)





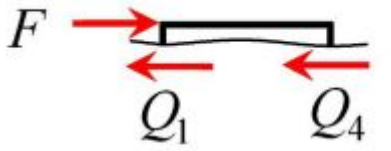
$$У = n - Л$$

$$n = 4 \qquad Л = 1$$

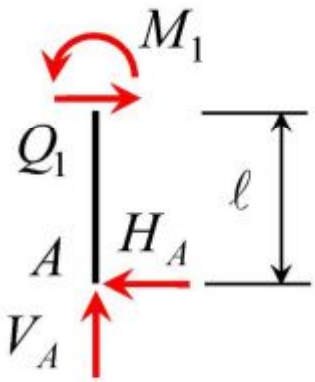
$$У = 4 - 1 = 3$$

$$\sum m_{(C)} = M_1 - M_2 = 0$$

$$\sum m_{(D)} = -M_3 + M_4 = 0$$



$$\sum x = F - Q_1 - Q_4 = 0$$



$$\sum m_{(A)} = Q_1 \ell - M_1 = 0$$

$$Q_1 = \frac{M_1}{\ell} \qquad \dots Q_4 = \frac{M_4}{\ell}$$

$$F - \frac{M_1}{\ell} - \frac{M_4}{\ell} = 0$$

$$|M_i| \le M_{\text{пр}} \quad \begin{cases} M_i \le M_{\text{пр}} \\ -M_i \le M_{\text{пр}} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,4$$

Сформулируем задачу ЛП

$$F \to \max$$

$$M_1 - M_2 = 0$$

$$-M_3 + M_4 = 0$$

$$F - \frac{M_1}{\ell} - \frac{M_4}{\ell} = 0$$

$$M_i \le M_{\text{пр}} \qquad -M_i \le M_{\text{пр}} \qquad i = 1,\ldots,4$$

Табличная форма записи задачи ЛП

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	$\begin{matrix}=\\ \leq\end{matrix}$	
1	0	1	-1	0	0	$=$	0
2	0	0	0	-1	1	$=$	0
3	1	$-1/\ell$	0	0	$-1/\ell$	$=$	0
4	0	1	0	0	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
5	0	0	1	0	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
6	0	0	0	1	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
7	0	0	0	0	1	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
8	0	-1	0	0	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
9	0	0	-1	0	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
10	0	0	0	-1	0	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
11	0	0	0	0	-1	$\leq$	$M_{\text{пр}}$
12	1	0	0	0	0		

Числовые значения

$\ell = 3$ м

Сечение колонны и ригеля одинаково

Двутавр № 20

$S_z = 104\ \text{см}^3$

$W_\text{Т} = 2 \cdot 104 = 208\ \text{см}^3$

$M_\text{пр} = 208 \cdot 24{,}5 = 5096\ \text{кН} \cdot \text{см} \approx 51\ \text{кН} \cdot \text{м}$

Ответ $F_\text{пр} = \dfrac{2M_\text{пр}}{\ell} = \dfrac{2 \cdot 51}{3} = 34\ \text{кН}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛП

Случай двух переменных

Целевая функция

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

Ограничения

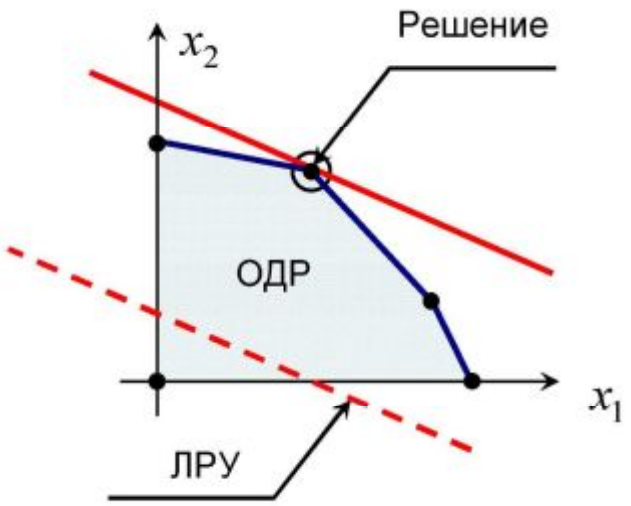
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2$$

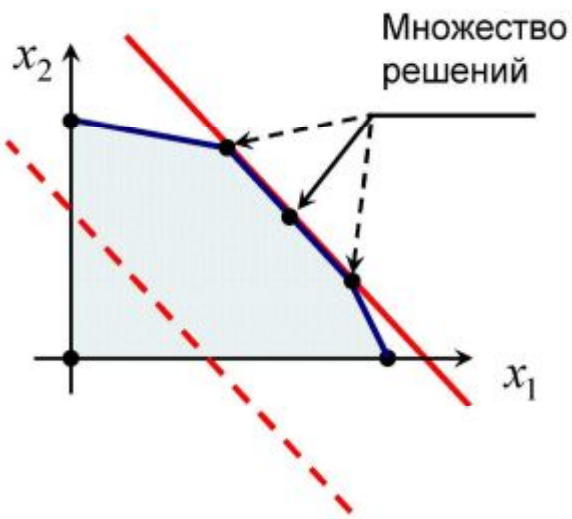
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \le b_3$$

$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$ (переменные неотрицательные)

Геометрическая интерпретация

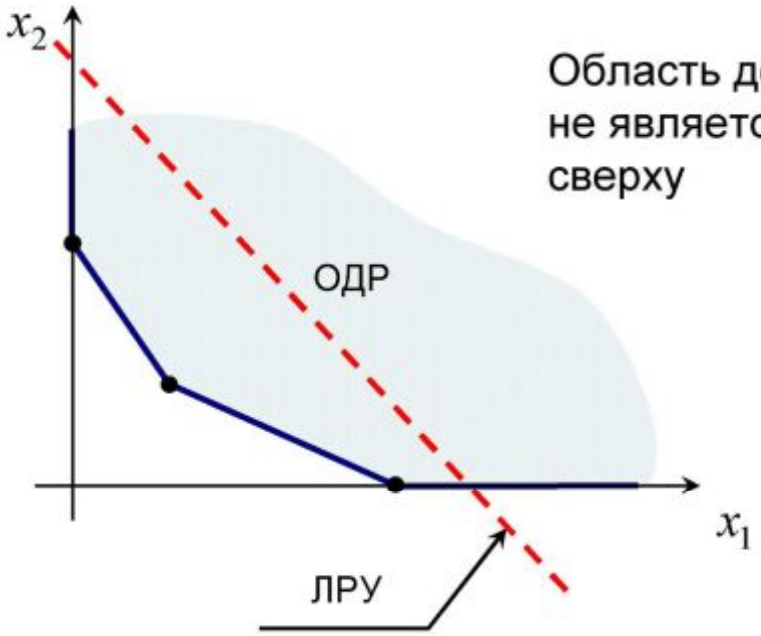


1. Единственное решение



2. Бесконечное множество решений

3. Нет решения



Область допустимых решений не является ограниченной сверху

Если решение задачи ЛП существует, то оно находится в вершине ОДР или на границе-ребре

Полный перебор вершин многогранника

Количество переменных n

Количество ограничений m

$$m > n$$

В вершине обращаются в равенства n ограничений

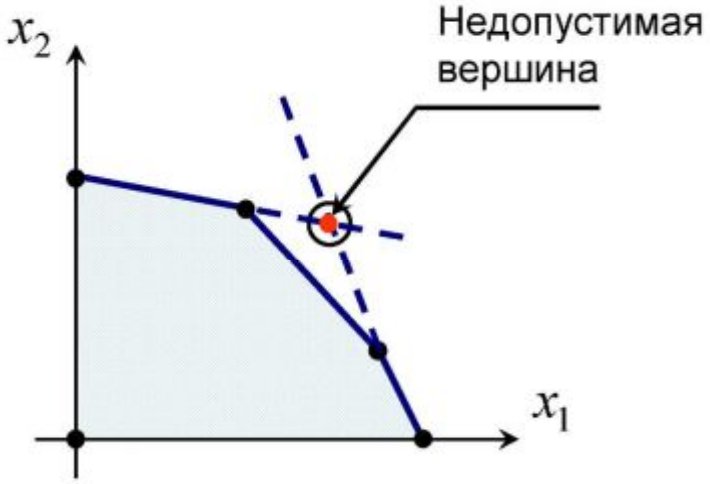
Количество возможных вариантов $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

$m = 3$

$n = 2$

$$\frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Как появилась третья вершина?



$$m = 11$$

$$n = 5$$

$$\frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$$

Сколько раз требуется решить систему уравнений с пятью неизвестными?

Есть ли более короткий способ решения задачи?

Симплекс-метод решения задачи ЛП

1. Приводим задачу к каноническому виду

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$m < n$ Обязательное условие

$$x_j >= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ограничения в виде неравенств превращаем в равенства, например

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_3 = b_2 \qquad x_3 \ge 0$$

2. Определяем первую допустимую вершину (начальное приближение)

3. Переходим в соседнюю вершину с большим значением целевой функции (если такой вершины нет, значит решение найдено)

4. Так как число вершин конечно, то решение может быть найдено за конечное число шагов

Свободные и базисные переменные

Для m уравнений должно быть

m базисных переменных (отличных от нуля)

$n-m$ свободных переменных (с нулевыми значениями)

Выбираем базисные переменные и решаем систему уравнений

В результате решения возможно три случая:

- все ответы положительные (начальное приближение найдено)

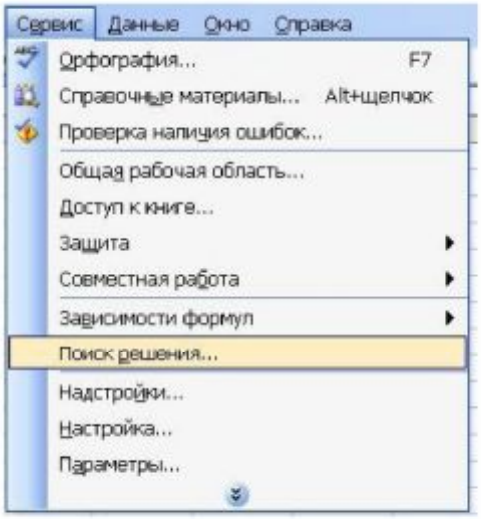
- среди ответов есть одно отрицательное число (недопустимая вершина)

- среди ответов есть одно нулевое значение (вырождение решения, когда в очередной вершине пересекаются не n , а $n+1$ ограничение)

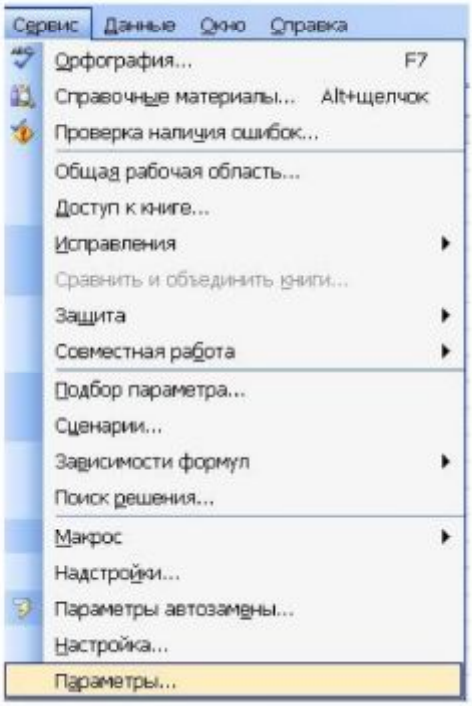
Переход в соседнюю вершину означает смену базисной и свободной переменной друг на друга по определенным правилам

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ MICROSOFT EXCEL

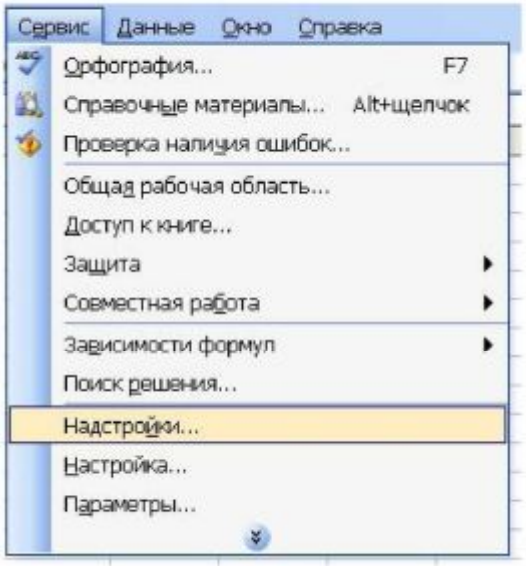
Проверяем возможность решения задачи ЛП Сервис - Поиск решения



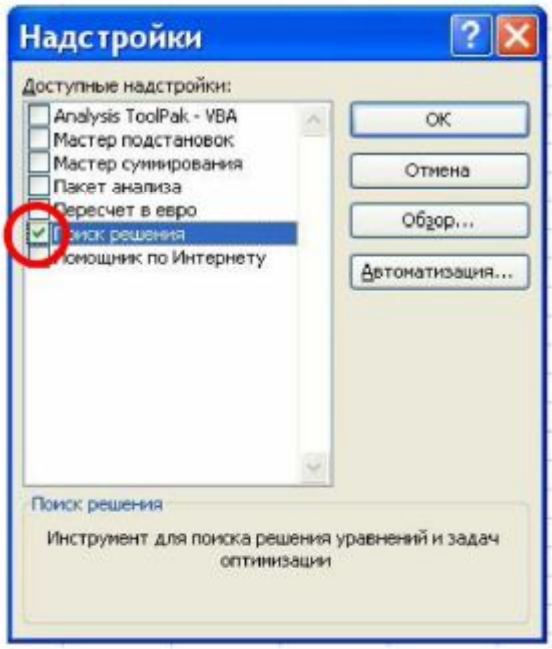
Пункт меню «Поиск решения» отсутствует



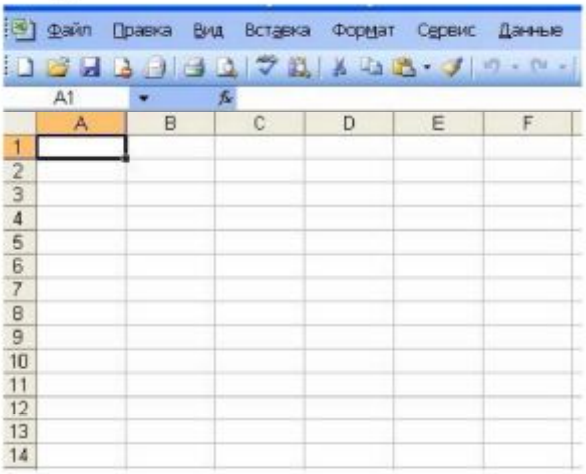
Сервис - Надстройки



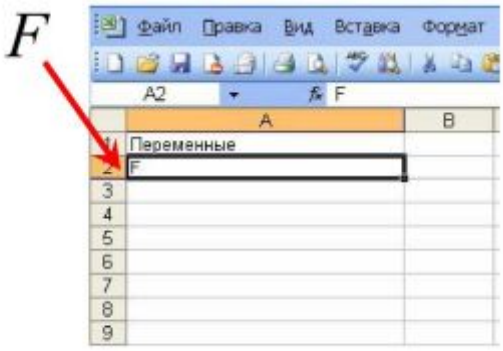
Выбрать опцию «Поиск решения»

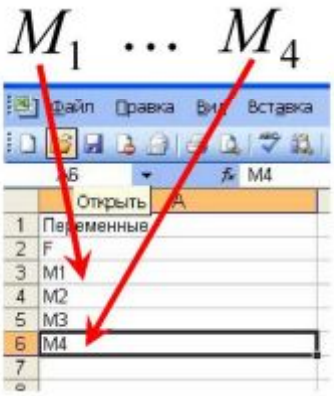


1. В новом листе MS Excel заносим информацию о задаче ЛП

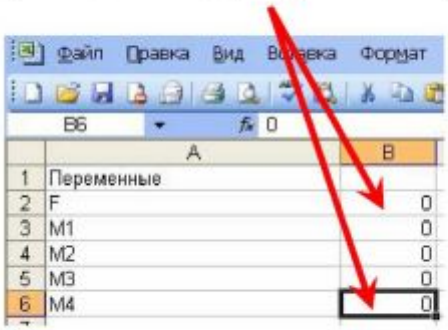


2. Перечень переменных



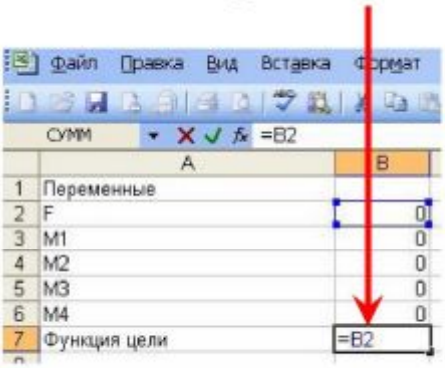


3. Задаем начальные значения для переменных (например, нулевые)



4. Программируем формулу вычисления функции цели

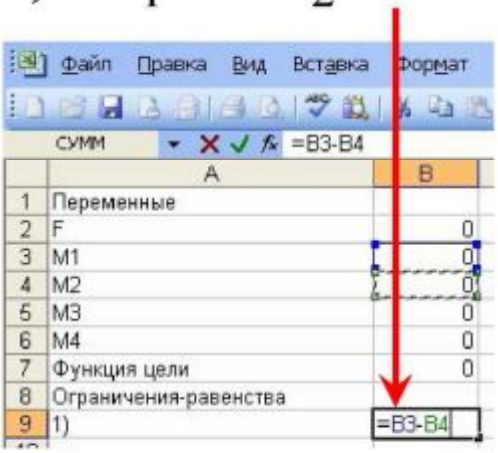
$$f(F, M_1, \ldots, M_4) = F$$



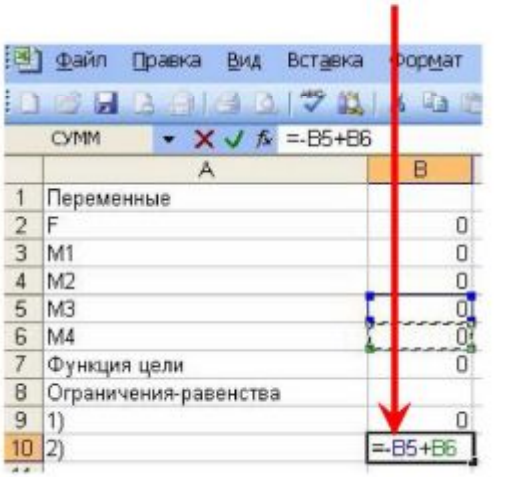
Ставим курсор в соответствующую ячейку,
Набираем формулу «=B2», ввод формулы - Enter

5. Программируем формулы для вычисления ограничений в виде равенств

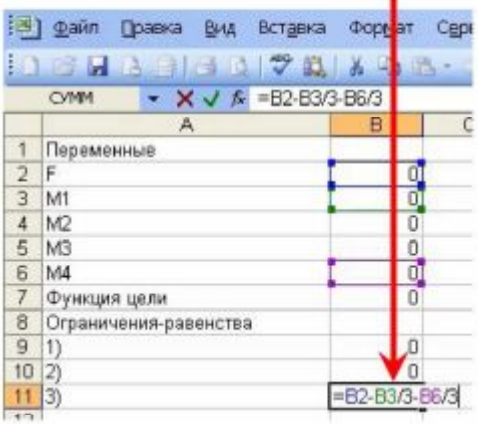
1) $M_1 - M_2 = 0$



2) $-M_3 + M_4 = 0$

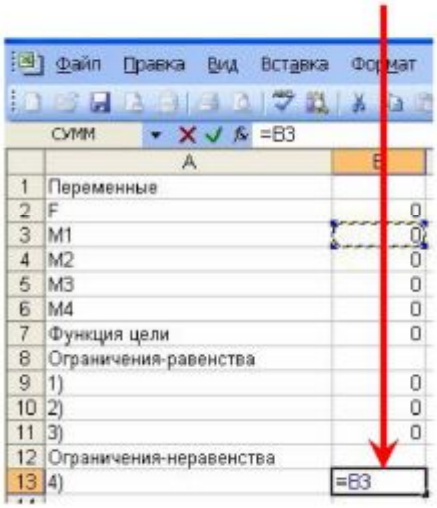


$$3)\ F - \frac{M_1}{3} - \frac{M_4}{3} = 0$$

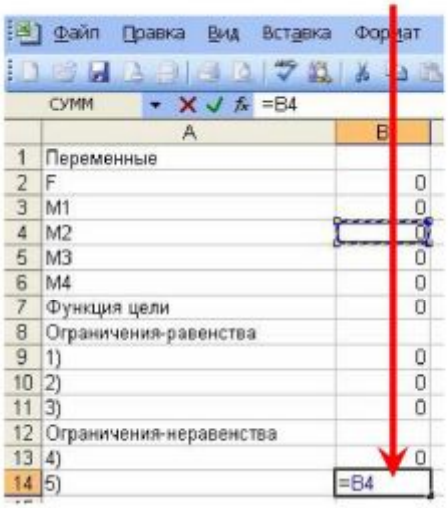


6. Программируем формулы для вычисления ограничений в виде неравенств

$$4)\ M_1 \le 51$$

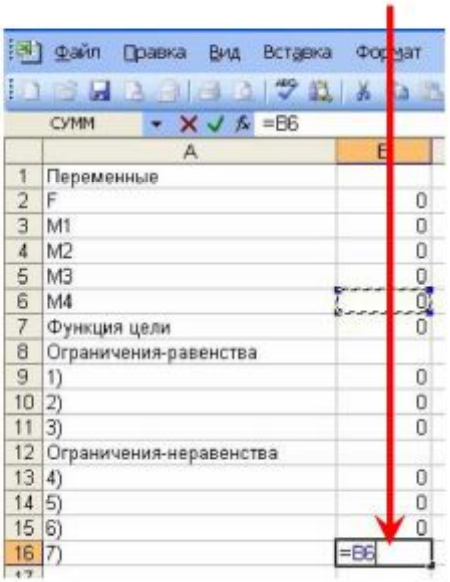


$$5)\ M_2 \le 51$$

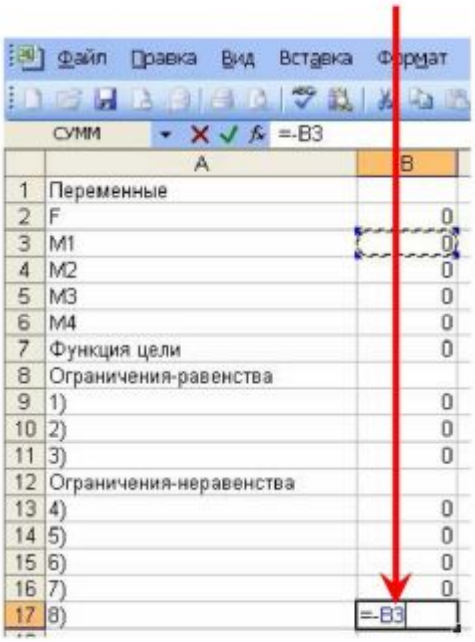


...

$$7)\ M_4 \le 51$$

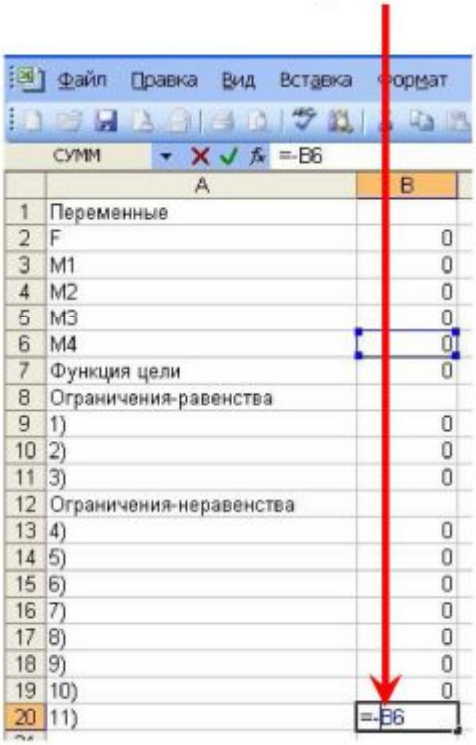


$$8) - M_1 \le 51$$

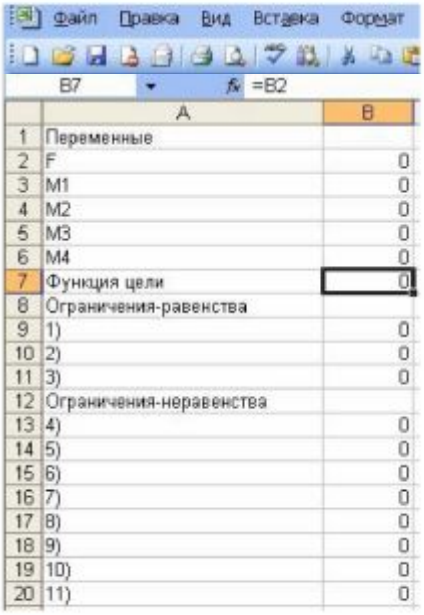


...

$$11) - M_4 \le 51$$

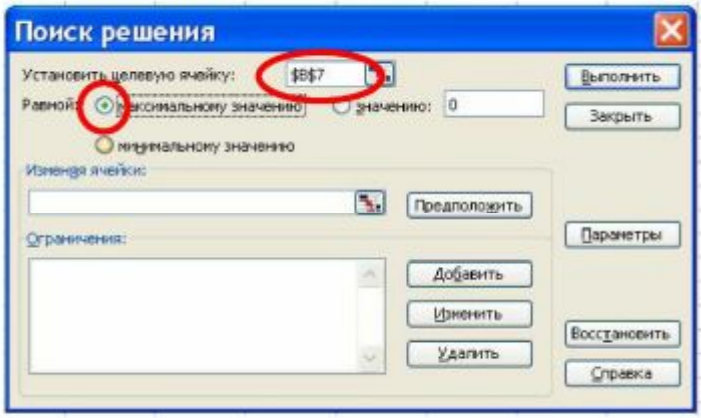


7. Выделяем ячейку, в которой вычисляется функция цели



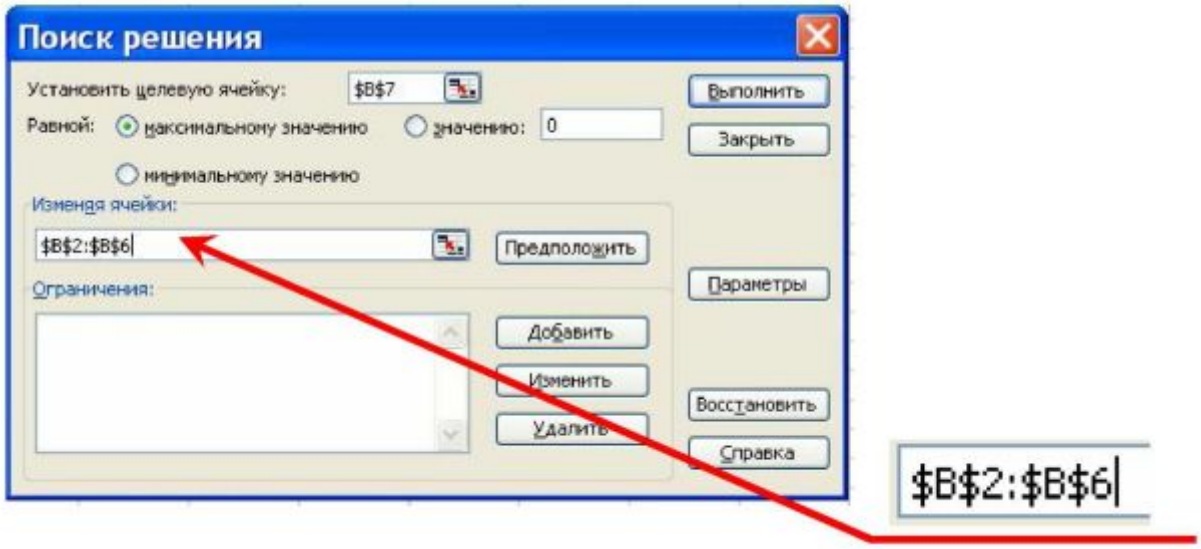
	A	B
1	Переменные	
2	F	0
3	M1	0
4	M2	0
5	M3	0
6	M4	0
7	Функция цели	0
8	Ограничения-равенства	
9	1)	0
10	2)	0
11	3)	0
12	Ограничения-неравенства	
13	4)	0
14	5)	0
15	6)	0
16	7)	0
17	8)	0
18	9)	0
19	10)	0
20	11)	0

8. Сервис – Поиск решения – Равной максимальному значению



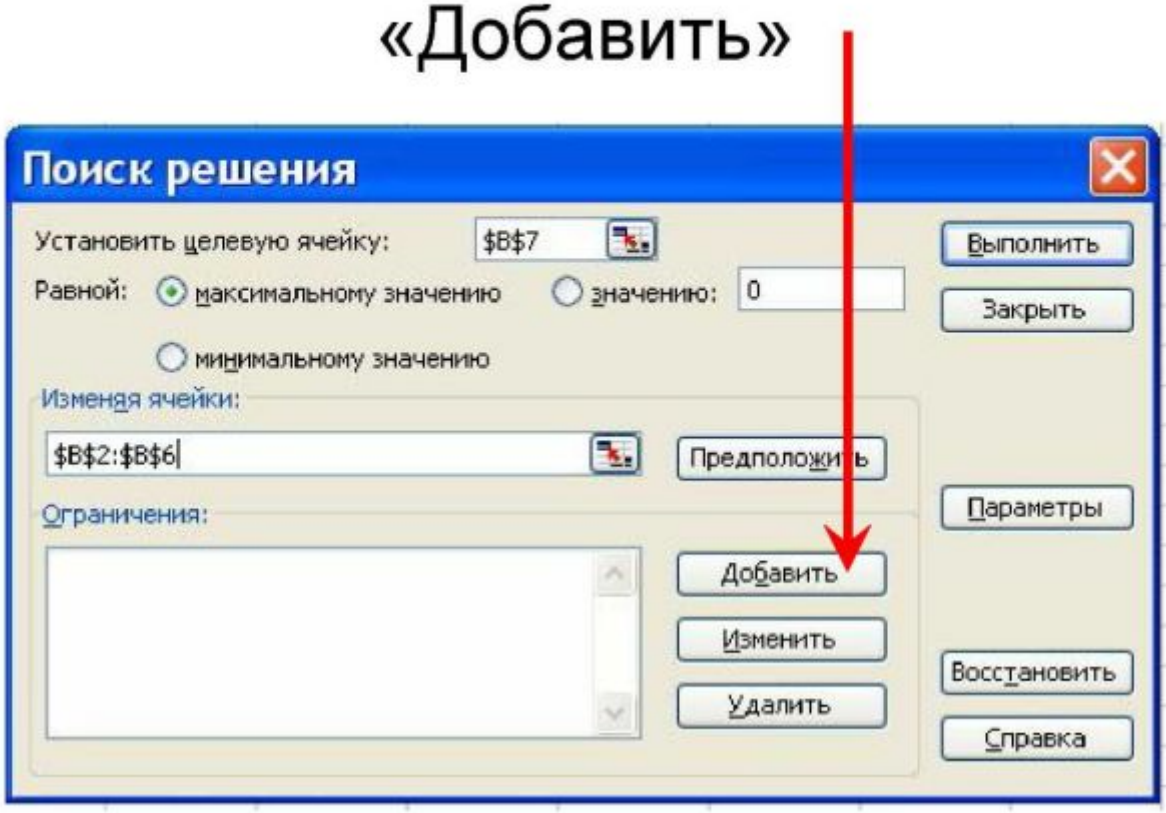
9. Указываем диапазон ячеек, содержащих значения переменных:

«Предположить», после адреса первой ячейки с переменной поставить «:» и указать последнюю ячейку с переменной

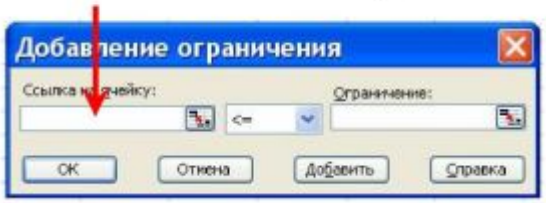


10. Добавляем ограничения:

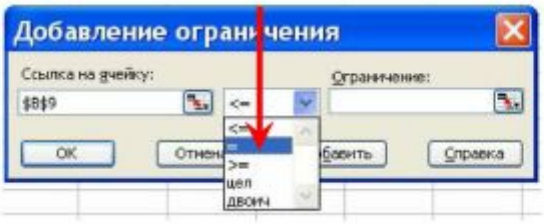
«Добавить»



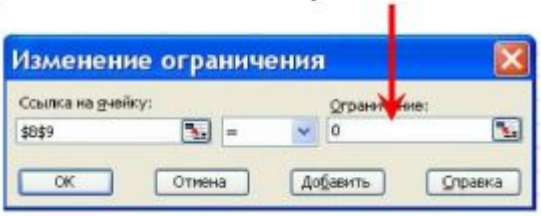
Указываем ячейку



Вид ограничения

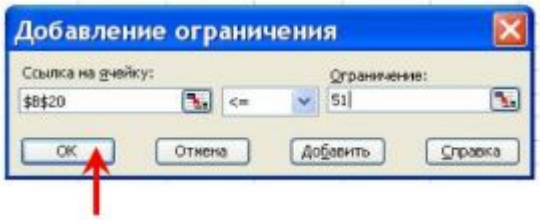


Вводим значение ограничения



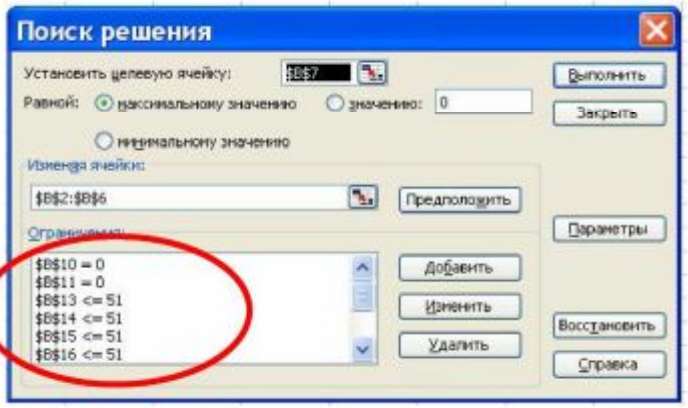
Подтверждаем ввод кнопкой «Добавить» и продолжаем ввод ограничений

Последнее ограничение



Завершаем ввод ограничений кнопкой «ОК»

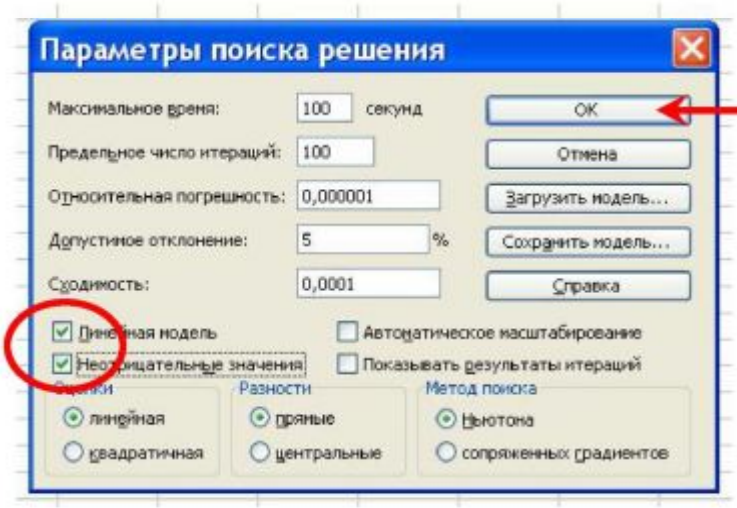
11. Проверяем введенные ограничения



При необходимости корректировки ограничений кнопки: «Изменить», «Удалить»

12. Устанавливаем тип задачи

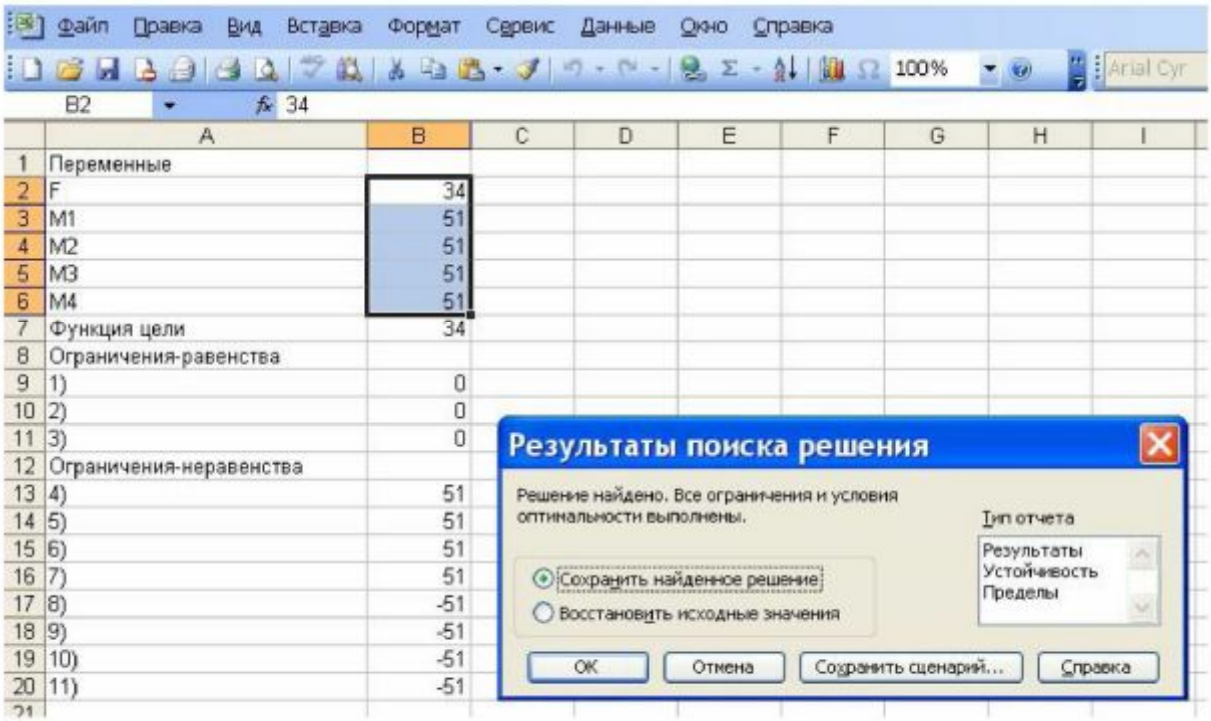
«Параметры»
- Линейная модель
- Неотрицательные переменные



Подтверждаем параметры

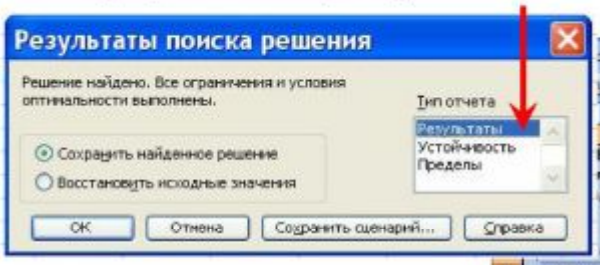
13. В диалоговом окне «Поиск решения» кнопка «Выполнить»

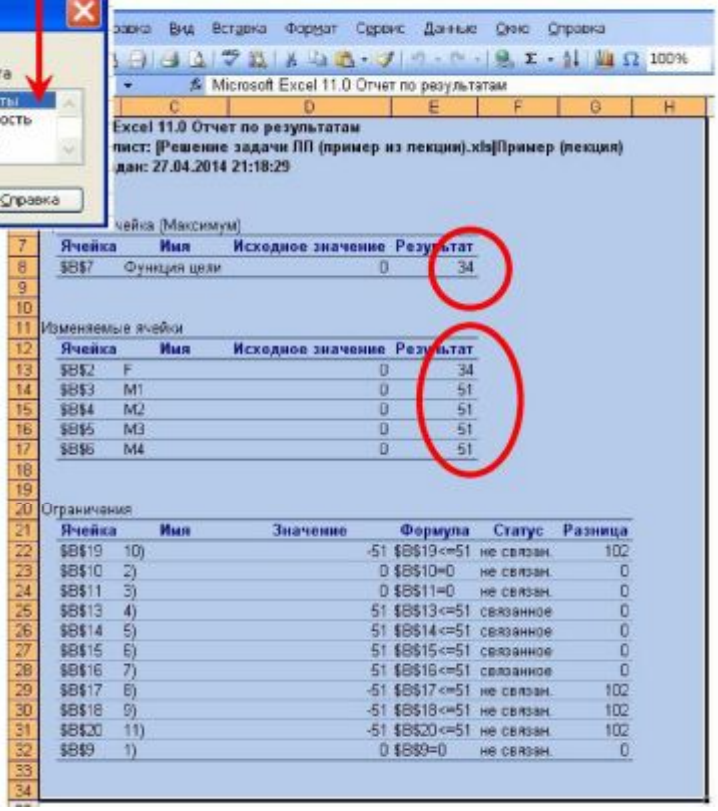
14. Результаты решения задачи

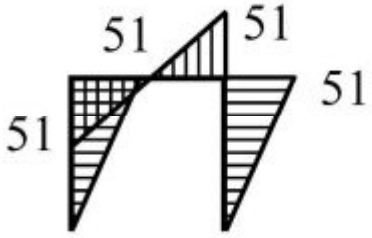


	A	B
1	Переменные	
2	F	34
3	M1	51
4	M2	51
5	M3	51
6	M4	51
7	Функция цели	34
8	Ограничения-равенства	
9	1)	0
10	2)	0
11	3)	0
12	Ограничения-неравенства	
13	4)	51
14	5)	51
15	6)	51
16	7)	51
17	8)	-51
18	9)	-51
19	10)	-51
20	11)	-51

15. Оформляем результаты







Эп. $M_{\text{пр}}$ (кН · м)

ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ

Для рамы с заданными размерами и поперечными сечениями элементов требуется

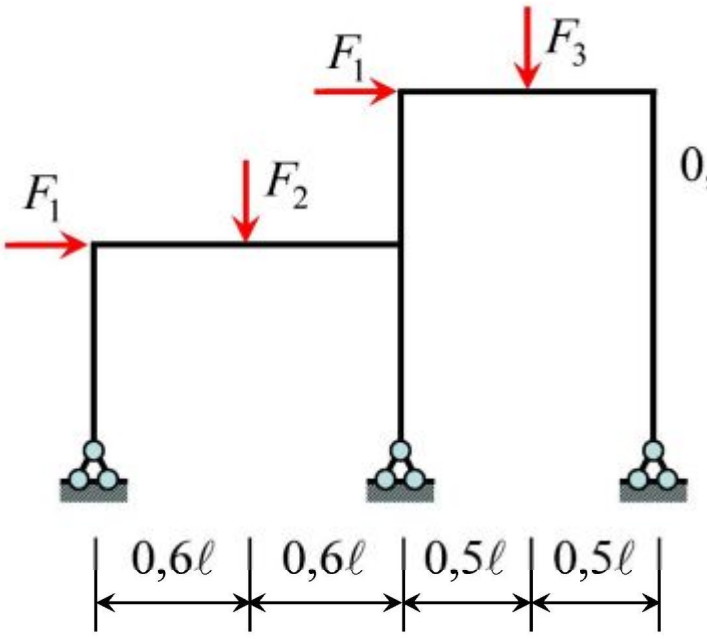
1. Определить предельную нагрузку статическим методом и построить эпюру изгибающих моментов в предельном состоянии

2. Найти допускаемую по условию прочности нагрузку и сравнить ее с предельной

Пункты 3, 4 сделаем только для «общего» примера:

3. Проверить правильность решения с помощью кинематического метода

4. Определить предельную нагрузку расчетом в SCAD



Числовые данные для расчета:

$\ell = 5$ м

$h = 4$ м

$F_1 = F$

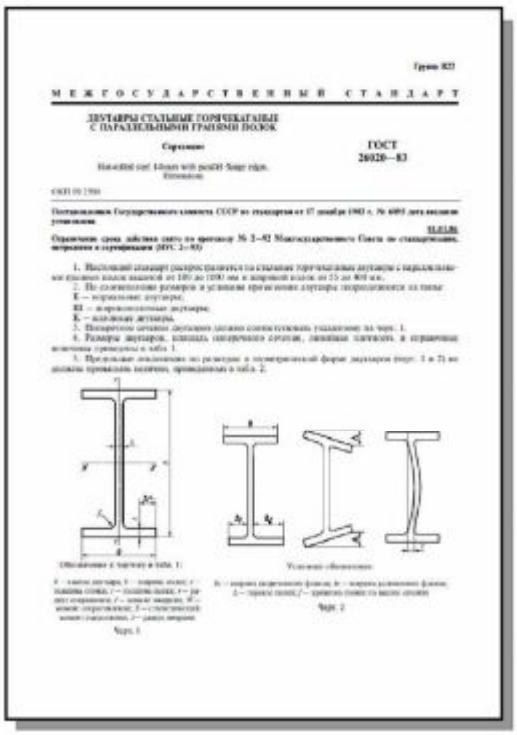
$F_2 = 2F$

$F_3 = 3F$

$R = 240$ МПа $\quad \sigma_T = 245$ МПа

Колонна – двутавр № 30К1 Ригель – двутавр № 35Ш1

Данные о сечениях взять по сортаменту ГОСТ 26020-83 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок»



Группа Г23

МЕЖГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ ПОЛОК

Сортамент

ГОСТ 26020—83

Hot-rolled steel I-beam with parallel flange sides. Assortment

ОКП 09 1700

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 17 ноября 1983 г. № 6093 дата введения установлена

01.01.86

Ограничение срока действия снято по протоколу № 3–92 Межгосударственного Совета по стандартизации, метрологии и сертификации (ИУС 2–93)

1. Настоящий стандарт распространяется на стальные горячекатаные двутавры с параллельными гранями полок высотой от 100 до 1000 мм и широкой полкой от 55 до 400 мм.

2. По соотношению размеров и условиям применения двутавры подразделяются на типы:

Б — нормальные двутавры;

Ш — широкополочные двутавры;

К — колонные двутавры.

3. Поперечное сечение двутавров должно соответствовать указанному на черт. 1.

4. Размеры двутавров, площадь поперечного сечения, линейная плотность и справочные величины приведены в табл. 1.

5. Предельные отклонения по размерам и геометрической форме двутавров (черт. 1 и 2) не должны превышать величин, приведенных в табл. 2.

Обозначения к чертежу и табл. 1:

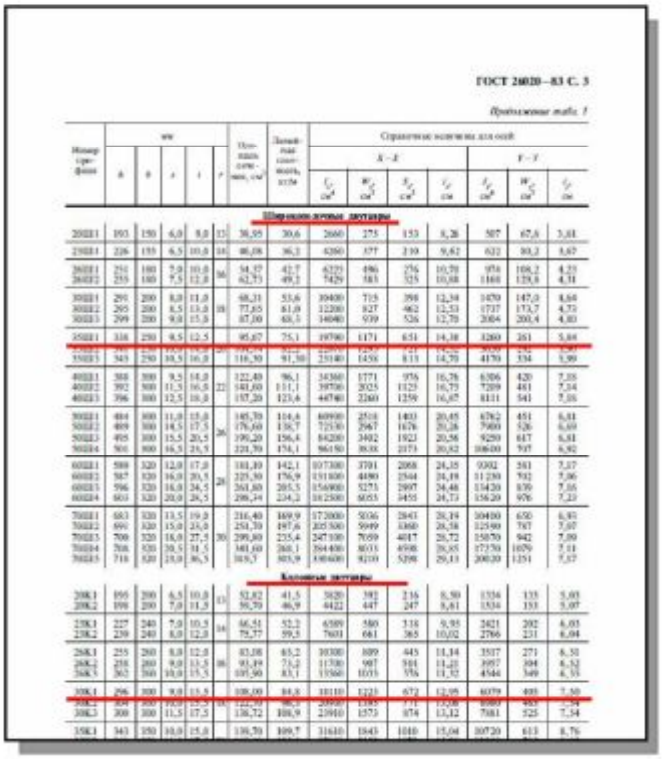
h — высота двутавра; b — ширина полки; s — толщина стенки; t — толщина полки; r — радиус сопряжения; I_x — момент инерции; W_x — момент сопротивления; i_x — радиус инерции

Черт. 1

Условное обозначение

h_1 — ширина полки двутавра; h_2 — ширина условного фланца; Δ — ширина полки; β — уклон полки по высоте двутавра

Черт. 2



ГОСТ 26020—83 С. 3

Продолжение табл. 1

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см²	Линейная плотность, кг/м	Справочные величины для осей X–X				Y–Y		
	h	b	s	t	r			I_x, см⁴	W_x, см³	S_x, см³	i_x, см	I_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см
Широкополочные двутавры														
20Ш1	193	150	6,0	8,0	13	38,95	30,6	2660	275	153	8,26	507	67,8	3,61
23Ш1	226	155	6,5	10,0	16	46,08	36,2	4260	377	210	9,62	622	80,2	3,67
26Ш1	251	160	7,0	10,0	16	54,37	42,7	6221	496	276	10,70	974	108,2	4,23
26Ш2	255	160	7,5	12,0		62,73	49,2	7429	583	325	10,88	1168	129,8	4,31
30Ш1	295	200	8,0	11,0	18	68,31	53,6	10400	715	398	12,34	1470	147,0	4,64
30Ш2	295	200	8,5	13,0		77,65	61,0	12200	827	462	12,53	1737	173,7	4,73
30Ш3	299	200	9,0	15,0		87,00	68,3	14040	939	526	12,70	2004	200,4	4,80
35Ш1	338	250	9,5	12,5	20	95,67	75,1	19790	1171	651	14,38	3260	261	5,84
35Ш2	343	250	10,5	16,0		116,30	91,30	25140	1458	813	14,70	4170	334	5,99
40Ш1	388	300	9,5	14,0	22	122,40	96,1	34360	1771	976	16,78	6306	420	7,18
40Ш2	392	300	11,5	16,5		140,60	111,1	39750	2025	1125	16,75	7209	481	7,16
40Ш3	396	300	12,5	18,0		157,20	123,6	44740	2260	1259	16,87	8111	541	7,18
50Ш1	484	300	11,0	15,0	26	145,70	114,4	60990	2518	1403	20,45	6762	451	6,81
50Ш2	489	300	14,5	17,5		176,60	138,7	72530	2967	1676	20,26	7900	526	6,69
50Ш3	495	300	15,5	20,5		199,20	156,4	84200	3402	1923	20,58	9259	617	6,81
50Ш4	501	300	16,5	23,5		221,70	174,1	96150	3838	2173	20,82	10600	707	6,92
60Ш1	588	320	12,0	17,0	28	181,10	142,1	107300	3701	2068	24,35	9302	581	7,17
60Ш2	587	320	16,0	20,5		225,30	176,9	131100	4480	2564	24,19	11230	702	7,06
60Ш3	596	320	16,0	24,5		261,80	205,5	156900	5273	2997	24,48	13420	839	7,16
60Ш4	603	320	20,0	26,5		296,14	234,2	181500	6053	3455	24,73	15620	976	7,23
70Ш1	683	320	13,5	19,0	30	216,40	169,9	172000	5036	2843	28,19	10400	650	6,93
70Ш2	691	320	15,0	23,0		254,70	197,6	202500	5999	3360	28,58	12580	787	7,03
70Ш3	700	320	18,0	27,5		299,80	235,4	247100	7059	4017	28,72	15070	942	7,09
70Ш4	708	320	20,5	31,5		341,60	268,1	284400	8031	4598	28,85	17270	1079	7,11
70Ш5	718	320	23,0	36,5		389,7	305,9	330600	9210	5298	29,13	20020	1251	7,17
Колонные двутавры														
20К1	195	200	6,5	10,0	13	52,02	41,5	3020	392	216	8,50	1334	133	5,05
20К2	198	200	7,0	11,5		59,79	46,9	4422	447	247	8,61	1534	153	5,07
23К1	227	240	7,0	10,5	16	66,51	52,2	6589	580	318	9,95	2421	202	6,03
23К2	239	240	8,0	12,0		79,77	59,5	7601	681	385	10,02	2766	231	6,04
26К1	255	260	8,0	12,0	18	83,08	65,2	10300	889	445	11,34	3517	271	6,51
26К2	258	260	9,0	13,5		93,19	73,2	11700	997	501	11,21	3957	304	6,52
26К3	262	260	10,0	15,5		105,90	83,1	13560	1035	576	11,32	4544	349	6,55
30К1	296	300	9,0	13,5	18	108,00	84,8	18110	1223	672	12,95	6079	405	7,50
30К2	304	300	10,0	15,5		122,50	96,1	20990	1385	771	13,08	6960	463	7,54
30К3	308	300	11,5	17,5		138,72	108,9	23910	1573	874	13,12	7881	525	7,54
35К1	343	350	10,0	15,0		138,70	109,7	31610	1843	1040	15,04	10720	613	8,76

Двутавр № 30К1. Характеристики сечения

Площадь $A = 108\ \text{см}^2$

Момент инерции $J_z = 18110\ \text{см}^4$

Момент сопротивления $W_z = 1223\ \text{см}^3$

Статический момент площади половины сечения $S_z = 672\ \text{см}^3$

Пластический момент сопротивления

$$W_\text{Т} = 2S_z = 2 \cdot 672 = 1344\ \text{см}^3$$

Предельный изгибающий момент $M_\text{пр} = \sigma_\text{Т} W_\text{Т} =$

$$= 24{,}5 \cdot 1344 = 32928\ \text{кН} \cdot \text{см} = 330\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

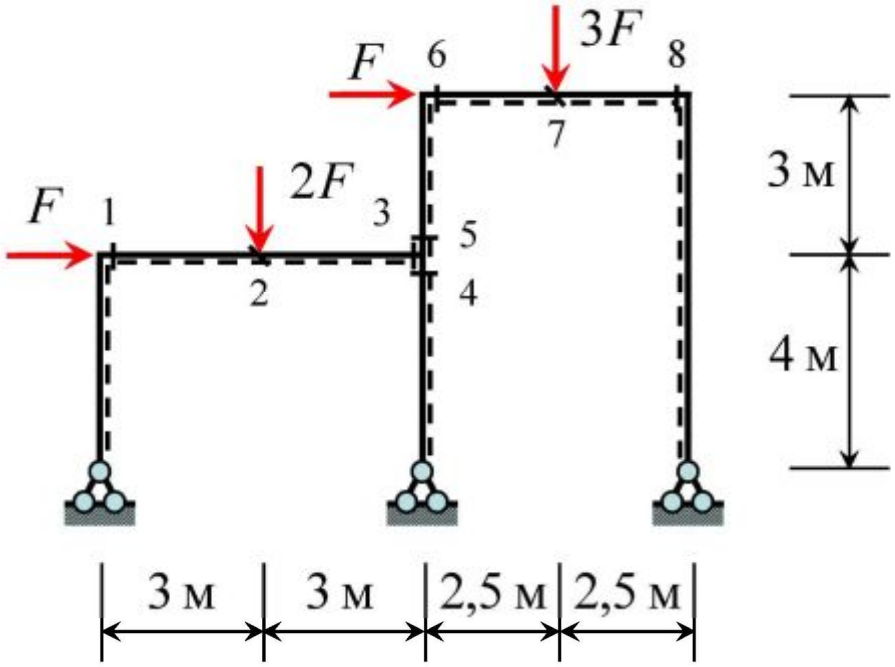
Двутавр № 35Ш1

$A = 95{,}7\ \text{см}^2 \quad J_z = 19790\ \text{см}^4 \quad W_z = 1171\ \text{см}^3$

$S_z = 651\ \text{см}^3$

$W_\text{Т} = 2 \cdot 651 = 1302\ \text{см}^3 \qquad M_\text{пр} = 319\ \text{кН} \cdot \text{м}$

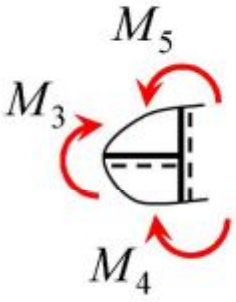
В узле рамы пластический шарнир образуется в ригеле



$n = 8$ $\quad$ $Л = 3К - Ш_0 - П = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

$У = 8 - 3 = 5$ $\quad$ Необходимо составить пять уравнений равновесия

Уравнение № 1

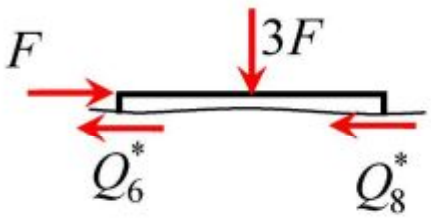


$$\sum m = M_3 + M_4 - M_5 = 0$$

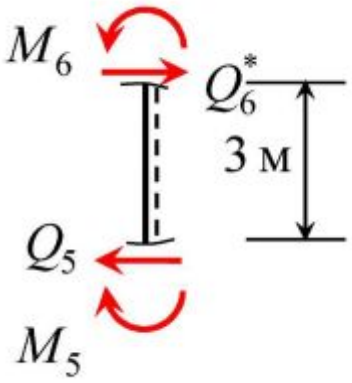
$$1)\ M_3 + M_4 - M_5 = 0$$

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$\lesseqgtr$	
1				1	1	−1				=	0
2											
3											
4											
5											

Уравнение № 2

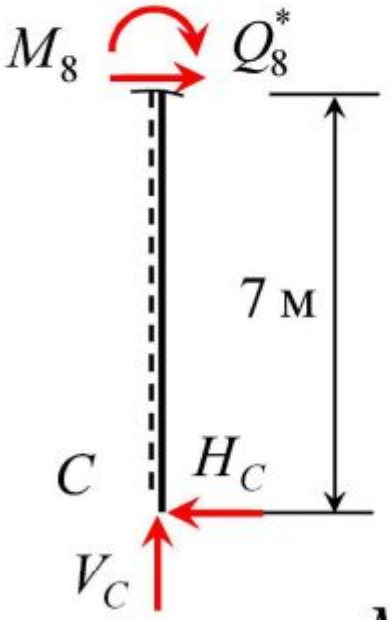


$$\sum x = F - Q_6^* - Q_8^* = 0$$



$$\sum m = -M_6 + Q_6^* \cdot 3 + M_5 = 0$$

$$Q_6^* = \frac{M_6 - M_5}{3}$$



$$\sum x = F - Q_6^* - Q_8^* = 0$$

$$Q_6^* = \frac{M_6 - M_5}{3}$$

$$\sum m = M_8 + Q_8^* \cdot 7 = 0$$

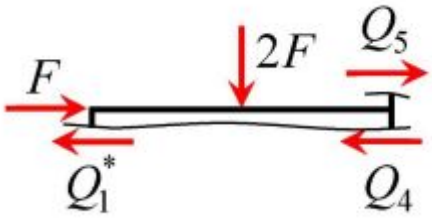
$$Q_8^* = -\frac{M_8}{7}$$

$$F - \frac{M_6 - M_5}{3} + \frac{M_8}{7} = 0 \qquad (\times 21)$$

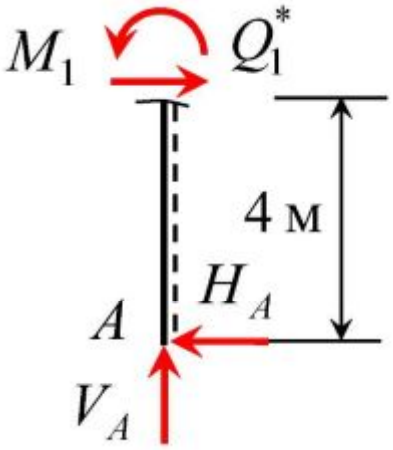
$$2)\ 21F + 7M_5 - 7M_6 + 3M_8 = 0$$

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$\leq =$	
1				1	1	-1				=	0
2	21					7	-7		3	=	0
3											
4											
5											

Уравнение № 3

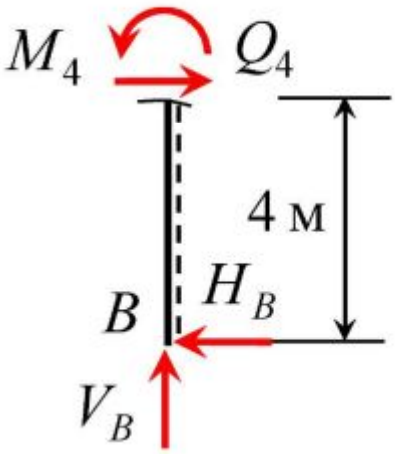


$$\sum x = F - Q_1^* - Q_4 + Q_5 = 0$$



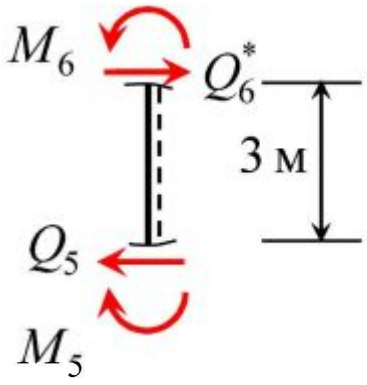
$$\sum m = -M_1 + Q_1^* \cdot 4 = 0$$

$$Q_1^* = \frac{M_1}{4}$$



$$\sum m = -M_4 + Q_4 \cdot 4 = 0$$

$$Q_4 = \frac{M_4}{4}$$



$$\sum m = -M_6 + Q_5 \cdot 3 + M_5 = 0$$

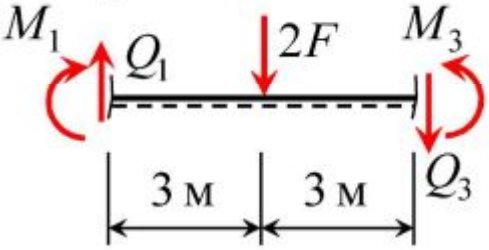
$$Q_5 = \frac{M_6 - M_5}{3}$$

$$F - \frac{M_1}{4} - \frac{M_4}{4} + \frac{M_6 - M_5}{3} = 0 \qquad (\times 12)$$

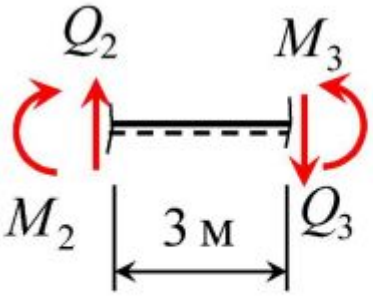
$$3)\ 12F - 3M_1 - 3M_4 - 4M_5 + 4M_6 = 0$$

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$\equiv \le$	
1				1	1	−1				=	0
2	21					7	−7		3	=	0
3	12	−3			−3	−4	4			=	0
4											
5											

Уравнение № 4



$$\sum m = M_1 + 2F \cdot 3 + Q_3 \cdot 6 - M_3 = 0$$



$$\sum m = M_2 + Q_3 \cdot 3 - M_3 = 0$$

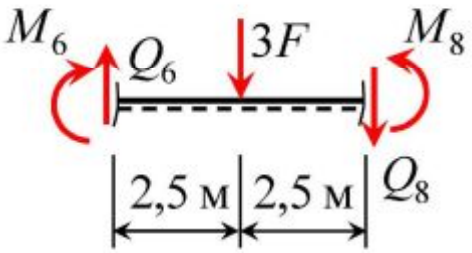
$$Q_3 = \frac{M_3 - M_2}{3}$$

$$M_1 + 6F + \frac{M_3 - M_2}{3} 6 - M_3 = 0$$

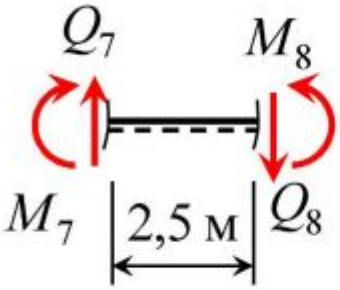
4) $6F + M_1 - 2M_2 + M_3 = 0$

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$\equiv \leq$	
1				1	1	−1				=	0
2	21					7	−7		3	=	0
3	12	−3			−3	−4	4			=	0
4	6	1	−2	1						=	0
5											

Уравнение № 5



$$\sum m = M_6 + 3F \cdot 2{,}5 + Q_8 \cdot 5 - M_8 = 0$$



$$\sum m = M_7 + Q_8 \cdot 2{,}5 - M_8 = 0$$

$$Q_8 = \frac{M_8 - M_7}{2{,}5}$$

$$7{,}5F + M_6 + \frac{M_8 - M_7}{2{,}5}5 - M_8 = 0$$

$$5)\ 7{,}5F + M_6 - 2M_7 + M_8 = 0$$

№	F	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	$\overset{=}{\leq}$	
1				1	1	-1				=	0
2	21					7	-7		3	=	0
3	12	-3			-3	-4	4			=	0
4	6	1	-2	1						=	0
5	7,5						1	-2	1	=	0

Пустые клетки - нулевые

6) $M_1 \leq 319$

7) $M_2 \leq 319$

8) $M_3 \leq 319$

9) $M_4 \leq 330$

10) $M_5 \leq 330$

11) $M_6 \leq 319$

12) $M_7 \leq 319$

13) $M_8 \leq 319$

14) $-M_1 \leq 319$

…

21) $-M_8 \leq 319$

Решение задачи ЛП в Excel

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
B11	Целевая функция	0	103,4594595

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
B2	F	0	103,4594595
B3	M1	0	319
B4	M2	0	310,3783784
B5	M3	0	-319
B6	M4	0	326,3899614
B7	M5	0	7,38996139
B8	M6	0	181,0540541
B9	M7	0	319
B10	M8	0	-319

Результаты решения

$$F_{\text{пр}} = 103{,}5 \text{ кН}$$

$$M_1 = 319 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

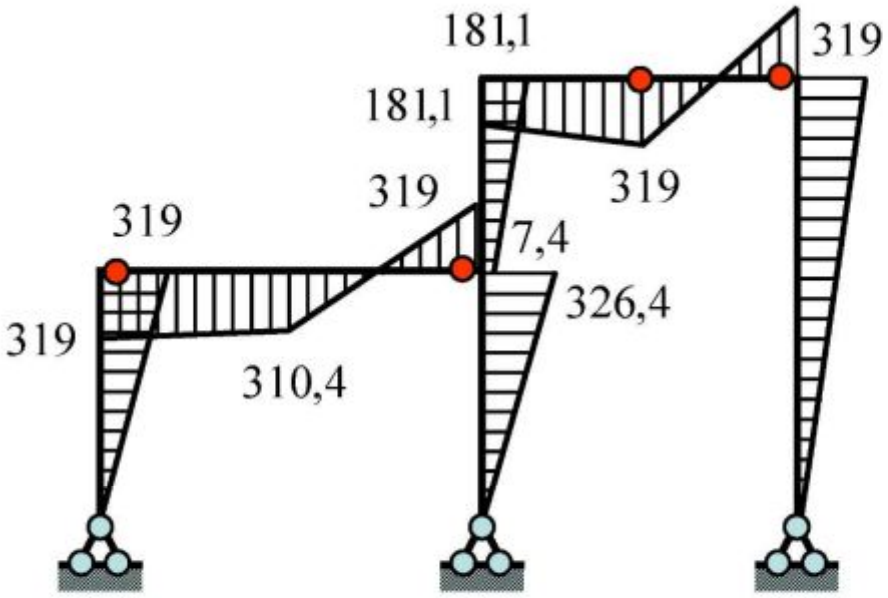
$$M_2 = 310{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_3 = -319 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_4 = 326{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_5 = 7{,}38 \text{ кН} \cdot \text{м} \qquad M_6 = 181{,}1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_7 = 319 \text{ кН} \cdot \text{м} \qquad M_8 = -319 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

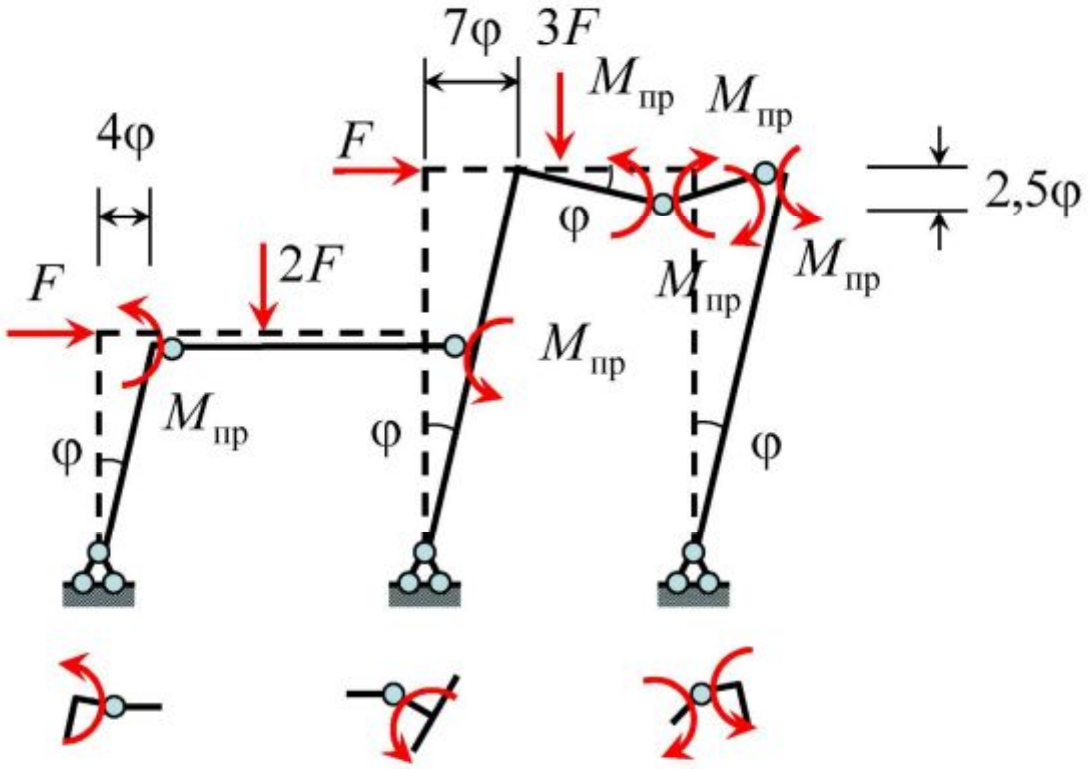


Эп. $M_{\text{пр}}$ (кН · м)

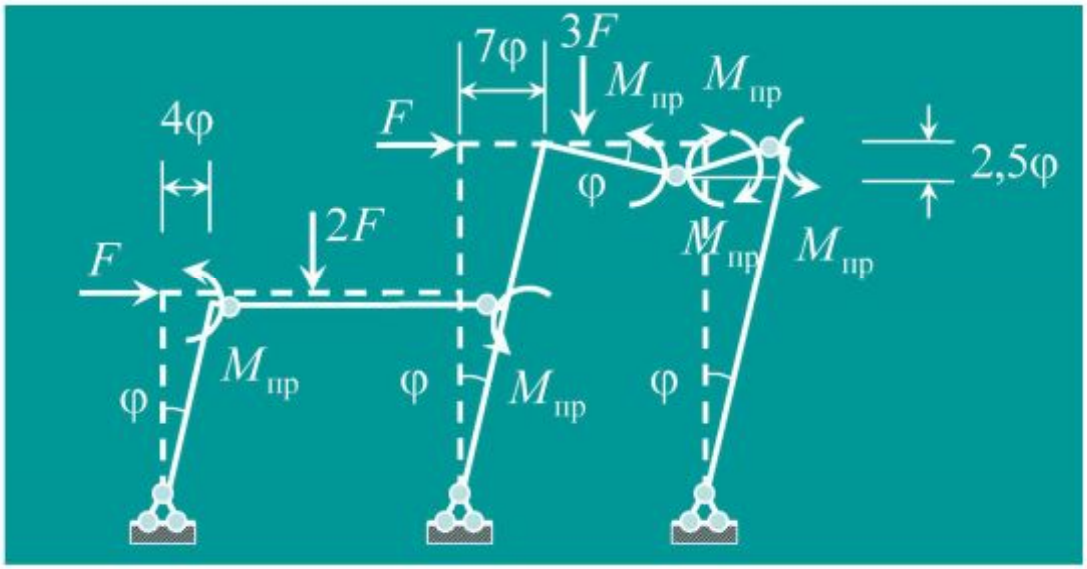
Как проверить правильность решения?

Число пластических шарниров $n_{\text{Т}} \leq \text{Л} + 1$

Решение задачи кинематическим методом



Как построить схему возможных перемещений в SCAD ?



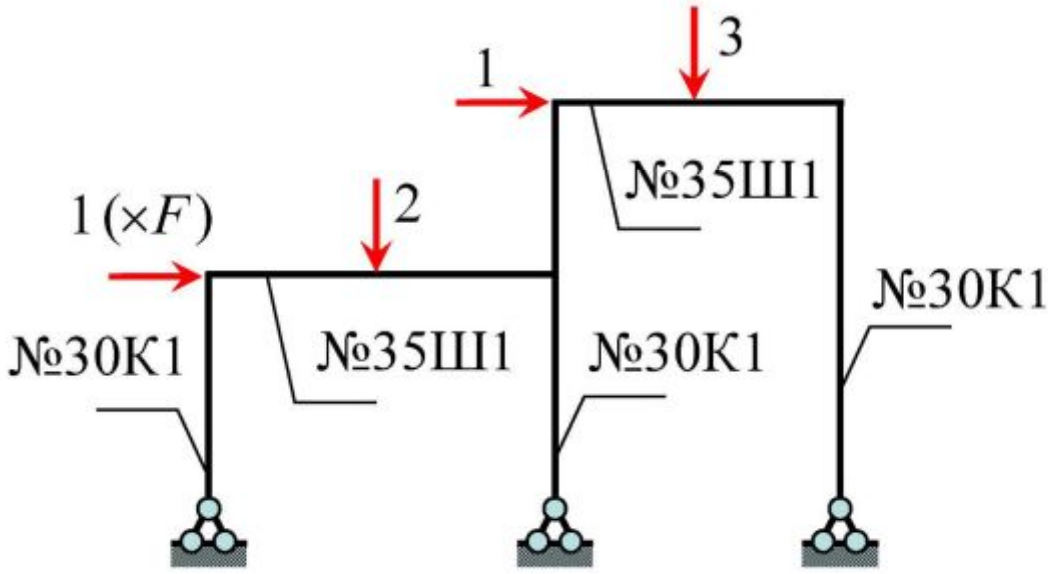
Уравнение работ $F \cdot 4\varphi + F \cdot 7\varphi + 3F \cdot 2{,}5\varphi =$

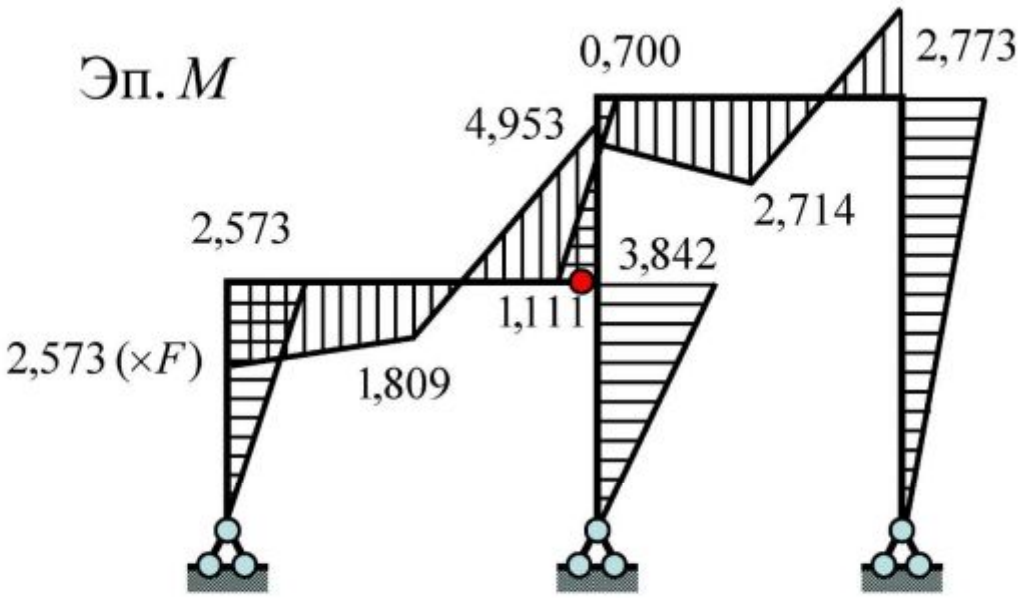
$= M_{пр}(\varphi + \varphi + 2\varphi + 2\varphi) \rightarrow F \cdot 18{,}5\varphi = M_{пр} \cdot 6\varphi$

$F_{пр} = 0{,}324 M_{пр}$ $F_{пр} = 0{,}324 \cdot 319 = 103{,}36$ кН · м

Определение предельной нагрузки в ПК SCAD

1. Выполняем расчет в упругой стадии





Где образуется первый пластический шарнир?

Условие прочности $$\frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{4{,}953F}{W_z} \le R$$

$$F \le \frac{R \cdot W_z}{4{,}953} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 1171 \cdot 10^{-6}}{4{,}953} = 56{,}7 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

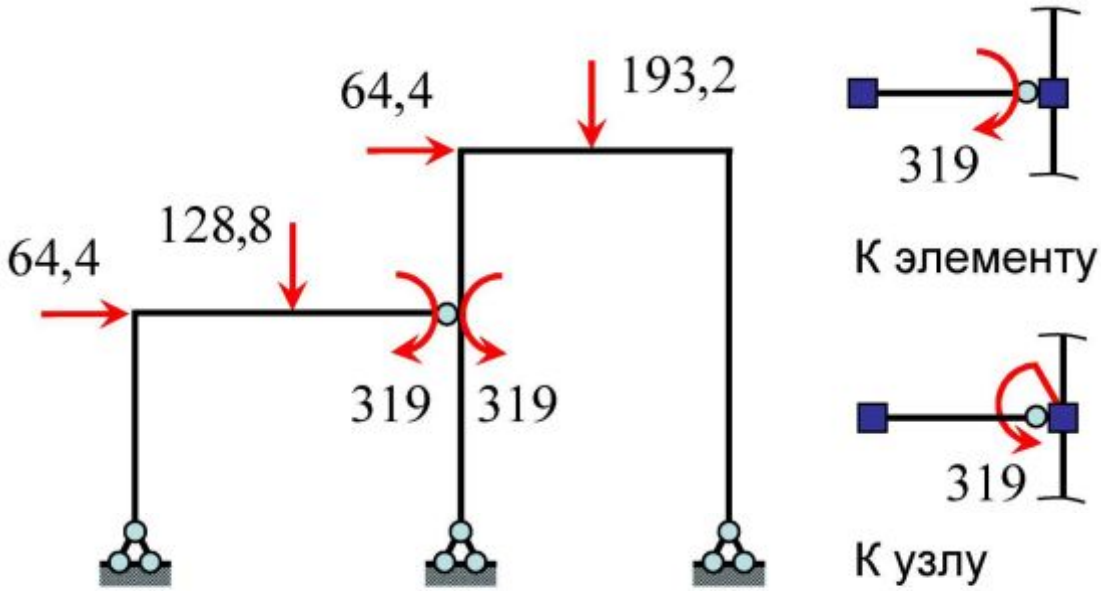
$$F = 56{,}7 \text{ кН} \qquad \frac{F_{\text{пр}}}{F} = \frac{103{,}5}{56{,}7} = 1{,}83$$

2. Определяем параметр нагрузки для образования первого пластического шарнира

$$4{,}953F = M_{\text{пр}}$$

$$F = \frac{M_{\text{пр}}}{4{,}953} = \frac{319}{4{,}953} = 64{,}4 \text{ кН}$$

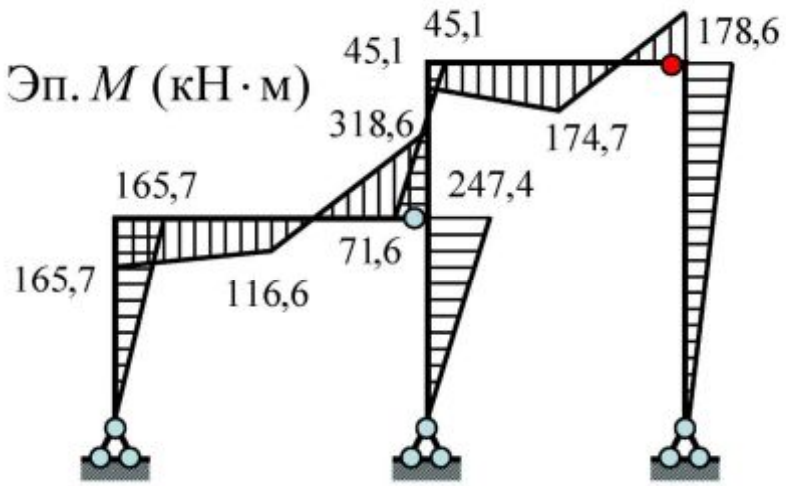
3. Расчет рамы с одним пластическим шарниром



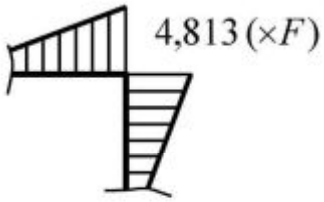
Загружение № 1 – силы с точностью до параметра F

Загружение № 2 – моменты $M_{\text{пр}} = 319\ \text{кН} \cdot \text{м}$

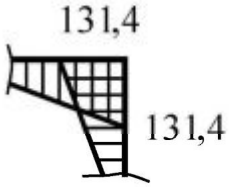
Загружение № 3 – приведено на схеме



От сил F



От моментов $M_{\text{пр}}$

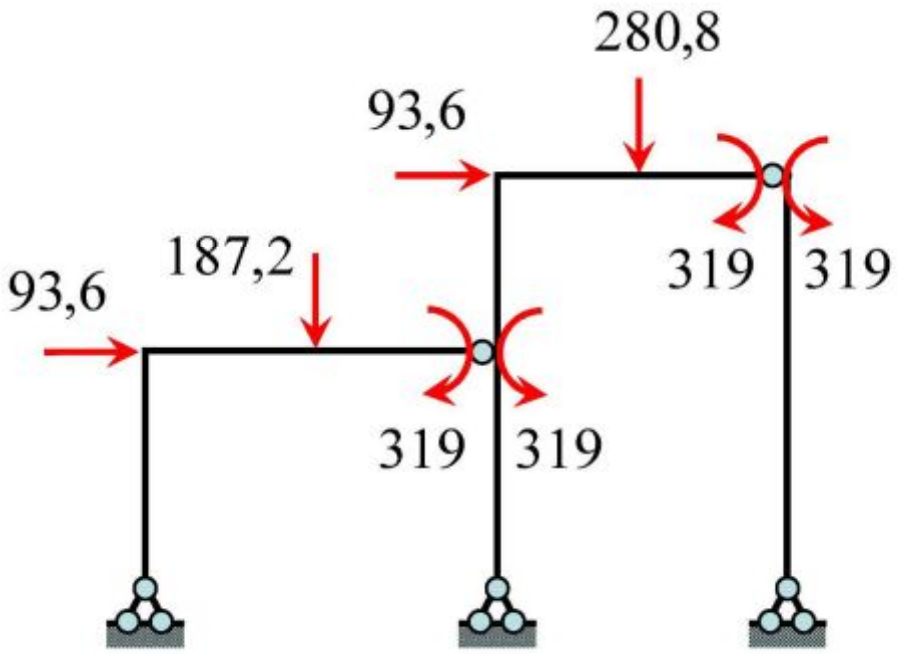


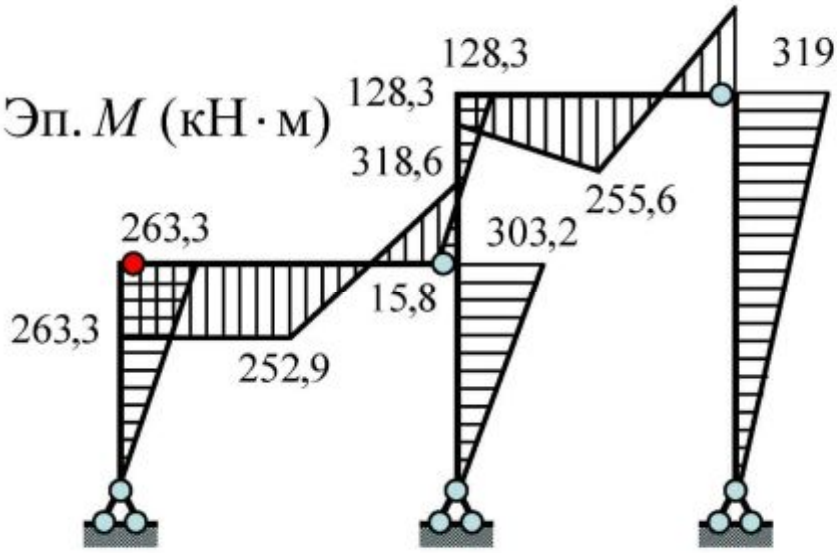
Как определить нагрузку для образования второго шарнира?

$$4{,}813F - 131{,}4 = M_{\text{пр}}$$

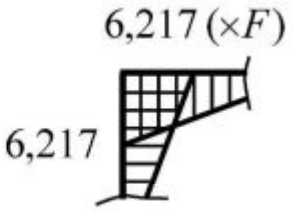
$$F = \frac{319 + 131{,}4}{4{,}813} = 93{,}6 \text{ кН}$$

4. Расчет рамы с двумя пластическими шарнирами

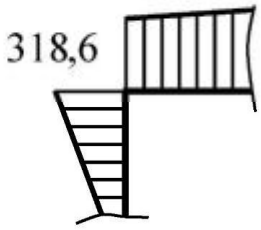




От сил F



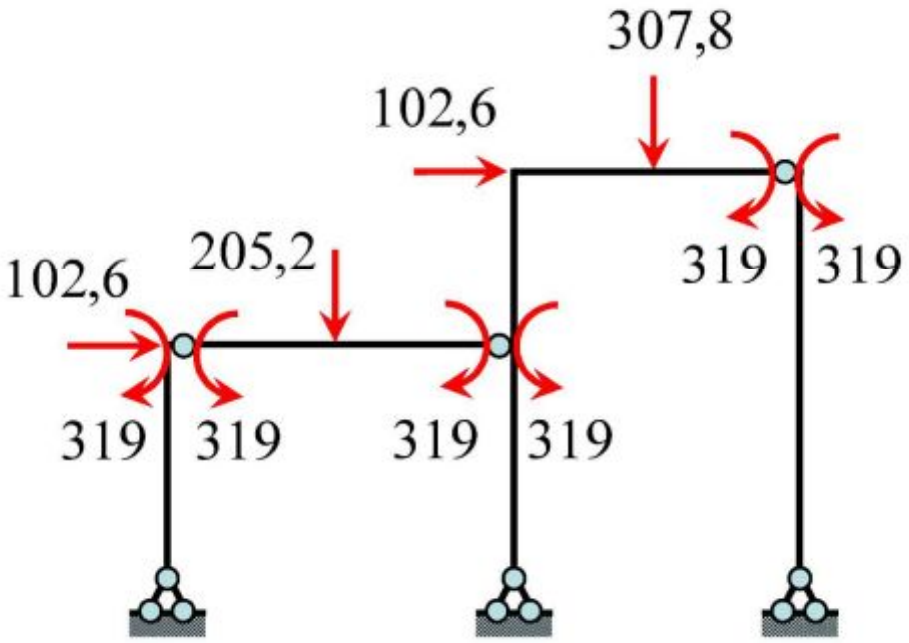
От моментов

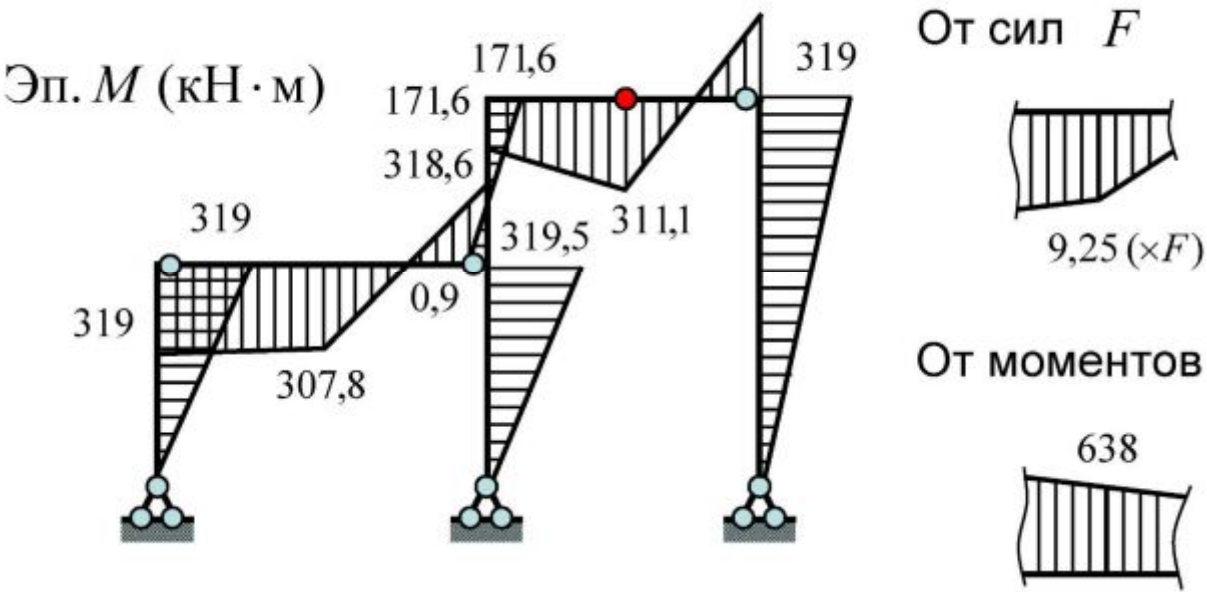


$$6{,}217F - 318{,}6 = M_{\text{пр}}$$

$$F = \frac{319 + 318{,}6}{6{,}217} = 102{,}6 \text{ кН}$$

5. Расчет рамы с тремя пластическими шарнирами

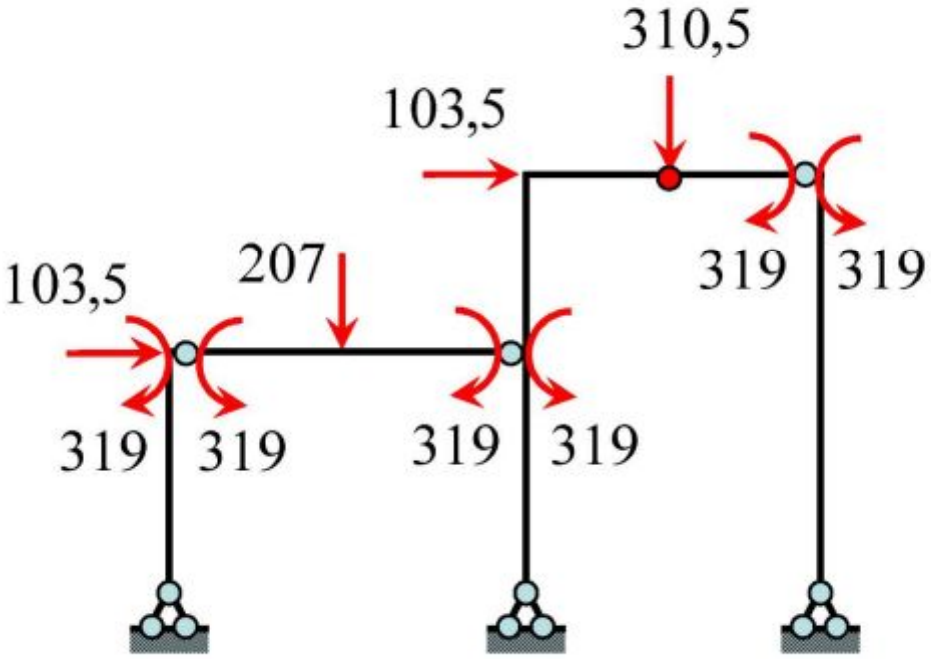




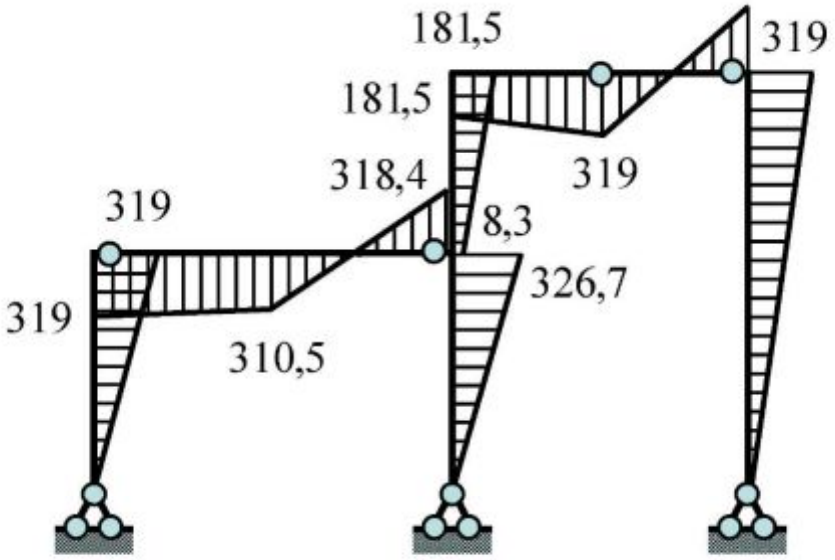
$$9{,}25F_{\text{пр}} - 638 = M_{\text{пр}}$$

$$F_{\text{пр}} = \frac{319 + 638}{9{,}25} = 103{,}5 \text{ кН}$$

6. Расчет ординат эпюры моментов в предельном состоянии



Результаты расчета в ПК SCAD



Эп. $M_{\text{пр}}$ (кН · м)

Сравните с результатами по статическому методу

Определение перемещений в схеме механизма разрушения в ПК SCAD

1. Расставляем шарниры в схеме механизма разрушения.

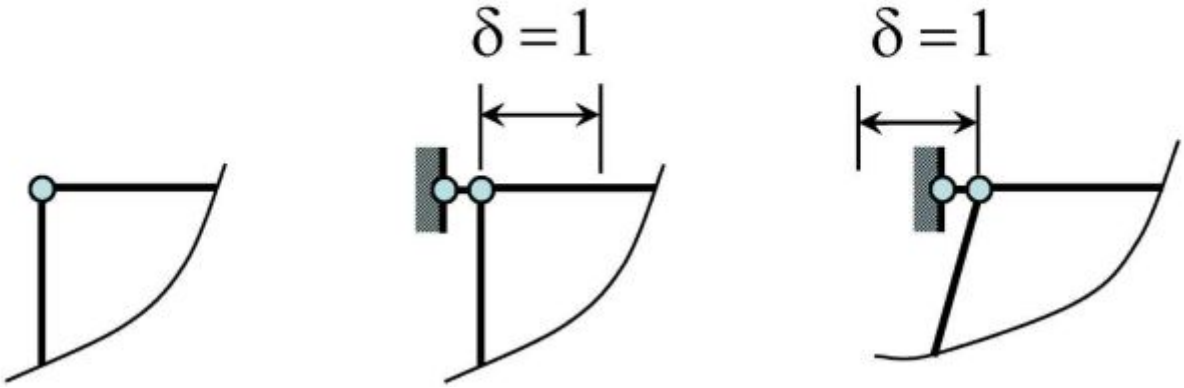
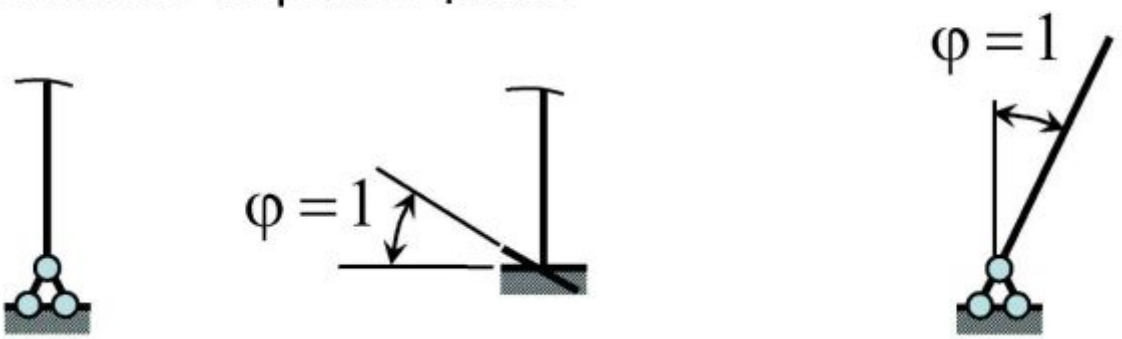
2. Добавляем связь по направлению возможного перемещения (линейную, угловую).

3. Задаем смещение связи на единицу (1 мм, 1 рад).

4. Выполняем расчет. По деформированной схеме определяем перемещения узлов.

Примечание:
Линейные перемещения по умолчанию выводятся в мм, угловые в радианах.

Линейное перемещение



Угловое перемещение