

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
Методические указания к контрольным работам  
для студентов заочной формы обучения

Рассматриваются вопросы расчета статически определимых стержневых систем на постоянную и временную нагрузки, приводятся типовые примеры с подробными решениями, которым предшествует краткое изложение основных положений теории.

## ВВЕДЕНИЕ

Статически определимыми называются сооружения реакции связей и внутренние усилия в элементах которых можно определить, используя только уравнения статики.

Расчет сооружений на действие подвижной вертикальной нагрузки проводится с использованием линий влияния. Линией влияния называют график зависимости искомого усилия от положения вертикальной единичной силы. На рис. 1 показаны линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в однопролетной балке. Они используются при построении более сложных линий влияния в многопролетных балках, фермах и других стержневых системах.

Построив линию влияния некоторого усилия  $S$ , можно найти величину этого усилия от заданной неподвижной нагрузки – сосредоточенных сил  $F$ , распределенных нагрузок  $q$  и моментов  $M$ :

$$S = \sum_1^n F_i y_i + \sum_1^m q_j \omega_j + \sum_1^l M_k \operatorname{tg} \varphi_k \quad (1)$$

Здесь  $y_i$  - ордината линии влияния под силой  $F_i$ ,  $\omega_j$  - площадь части линии влияния, расположенной под распределенной нагрузкой  $q_j$ ,  $\varphi_k$  - угол наклона прямолинейного участка линии влияния под моментом  $M_k$ .

## РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Статически определимая балочная система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями и без консолей), соединенных между собой шарнирами, называется многопролетной статически определимой балкой. Такая балка обычно оказывается более выгодной, чем несколько самостоятельных однопролетных балок.

Перед расчетом многопролетной статически определимой балкой следует определить, какие элементы балки являются основными и какие второстепенными, опирающимися на эти основные. Затем следует изобразить схему взаимодействия элементов балки – «этажную схему». Нагрузка, действующая на основную часть балки, не передается на вышележащие второстепенные части; нагрузка же, действующая на второстепенные (вышележащие) части балки, передается и на основную, которая служит опорой.

Расчет многопролетной шарнирно-консольной балки удобно вести по частям, начиная от самых «верхних» балок и последовательно переходя к нижележащим. При расчете нижележащих балок следует учитывать не только ту нагрузку, которая к ним непосредственно приложена, но и опорные давления от вышележащих балок, равных опорным реакциям последних, но имеющих обратное направление. Построение линий влияния рассмотрим на примере.

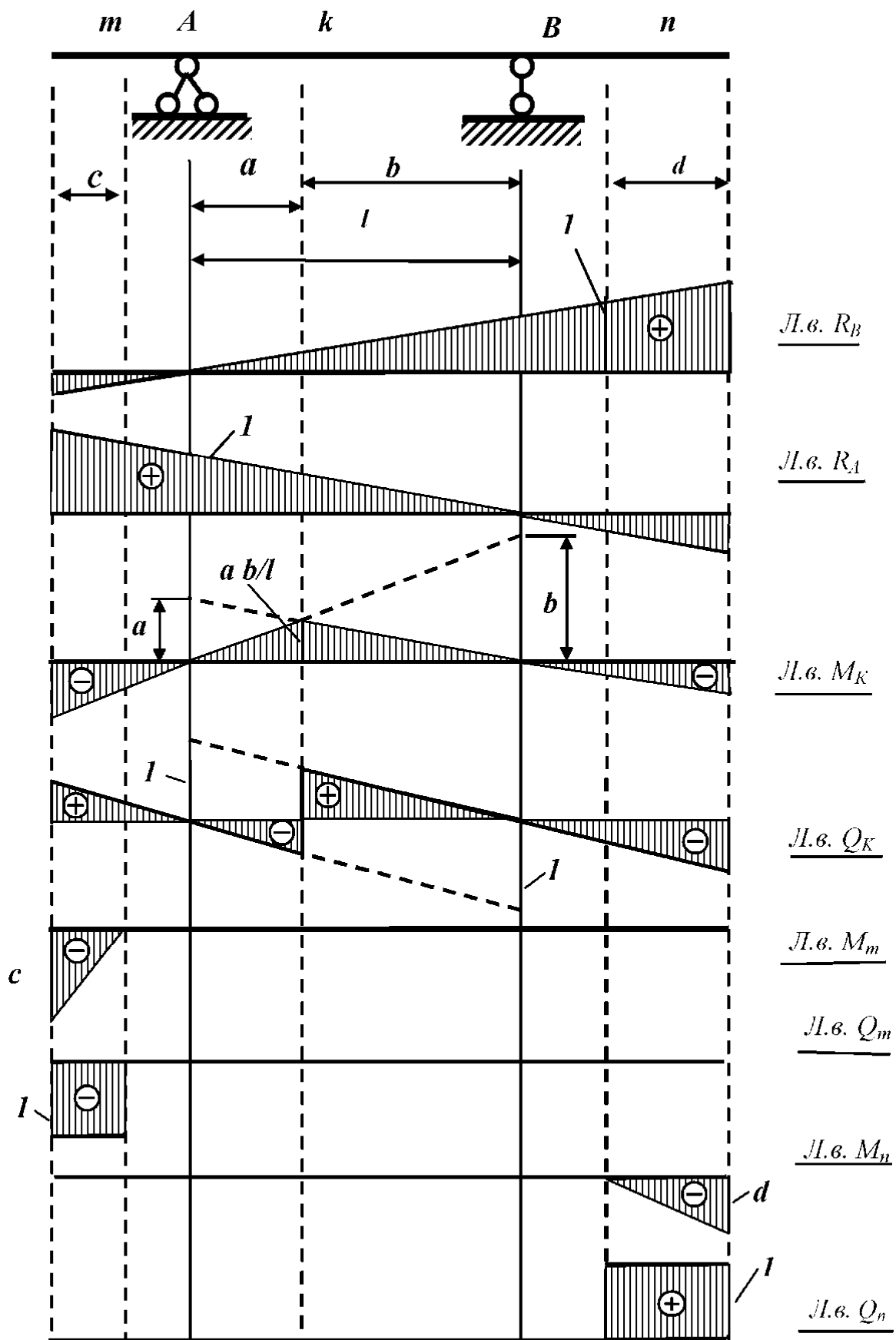


Рис.1

### Пример1. Расчет статически определимой многопролетной балки

*Задание.* Для балки, показанной на рис. 2,а требуется:

а) Построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);

б) построить линии влияния  $M$  и  $Q$  в сечении  $k$ , а также линию влияния опорной реакции  $R_c$ ;

в) определить по линиям влияния значения  $M$ ,  $Q$  и  $R_c$  от заданной нагрузки.

*Решение.* Начертим схему взаимодействия элементов многопролетной балки (рис. 2,б). Из нее видно, что балка состоит из основной балки  $AB$  и двух вспомогательных ( $BCD$  и  $DE$ ) причем балка  $BCD$  играет двойную роль - по отношению к балке  $AB$  она является вспомогательной, а для балки  $DE$  – основной. Первой рассчитываем самую «верхнюю» балку - вспомогательную балку  $DE$ . Усилия в ней не зависят от нагрузок других элементов, в то время как сама она влияет на эти элементы.

Опорные реакции балки  $DE$  равны  $R_D = R_E = P/2 = 6 \text{ кН}$ .

Эпюра изгибающих моментов имеет вид треугольника с ординатой под силой  $P \cdot l/4 = 12 \cdot 4/4 = 12 \text{ кН}$ .

Переходя к балке  $BCD$ , добавим к нагрузкам, действующим на нее, силу  $R'_D = 6 \text{ кН}$  от балки  $DE$ , приложенную в точке  $D$  и направленную вниз. Левая опорная реакция определится из условия равенства нулю моментов всех сил, приложенных к элементу  $BCD$ , относительно правой опоры ( $\sum M_c = 0$ ). Откуда,  $R_B = 6 \text{ кН}$ . Для нахождения правой опорной реакции приравняем к нулю сумму моментов относительно левой опоры  $B$ . Получим  $R_c = 18 \text{ кН}$ . Строим эпюру изгибающих моментов для этой балки.

Переходим к балке  $AB$  (рис. 2, д). Кроме заданной нагрузки  $q$ , точке  $B$  на нее действует сила  $R'_B = 6 \text{ кН}$  от вышележащей балки  $BCD$ . Определив опорные реакции, строим эпюру изгибающих моментов для этого элемента

Окончательная эпюра изгибающих моментов строится путем объединения соответствующих эпюр (рис.2,е), построенных для каждого элемента в отдельности, а окончательная эпюра поперечных сил - непосредственно по общей эпюре  $M$  с учетом зависимости  $Q = dM/dx$  (рис.2, ж).

Для построения линий влияния усилий в балке удобно пользоваться этажной схемой (рис.2,б).

1. Линия влияния опорной реакции  $R_c$ . Рассмотрим в начале движение груза  $\bar{P} = 1$  по самой балке  $BCD$ . При этом второстепенная балка  $DE$ , не загружена и не влияет на работу балки  $BCD$ . Тогда участок  $B'C'D'$  линии влияния  $R_c$ ,

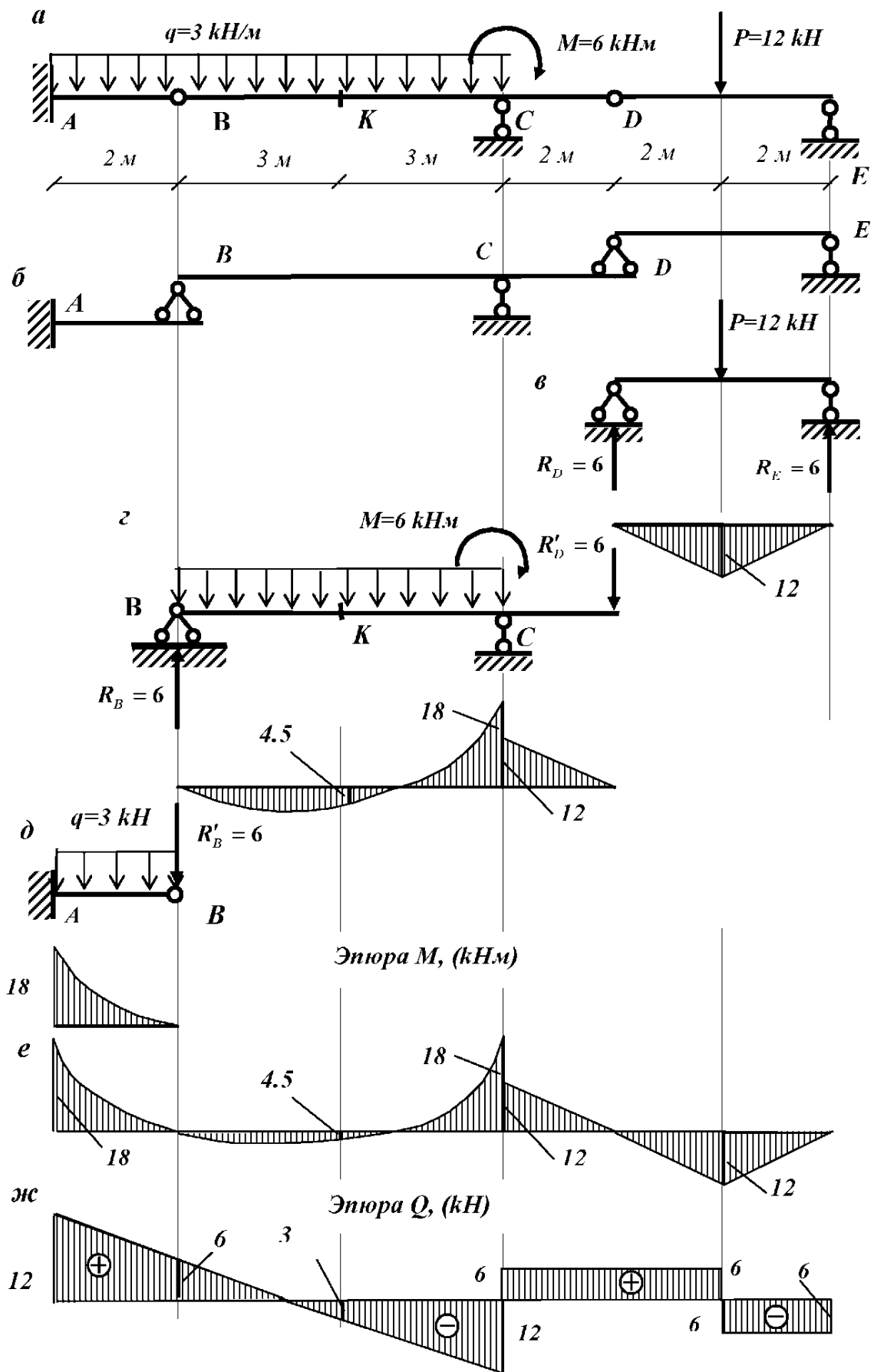


Рис.2

соответствующий передвижению силы  $\bar{P}=1$  по балке  $BCD$ , ни чем не будет отличаться от линии влияния правой опорной реакции отдельно стоящей простой балки (рис. 1). При положении силы  $\bar{P}=1$  в точке  $D$   $R_C = 8/6 = 1.333$ . При движении груза  $\bar{P}=1$  по балке  $DE$  в точке  $D$  на балку  $BCD$  передается давление  $R_D$ . Поскольку  $8/6$  - значение реакции  $R_C$  от единичной силы, то от  $R_D$  будем иметь  $R_C = (8/6) \cdot R_D$ . Значение  $R_D$  как опорной реакции меняется по линейному закону. Следовательно, и  $R_C$  при движении  $\bar{P}=1$  по балке  $DE$  меняется по закону прямой. При положении  $\bar{P}=1$  в точке  $E$   $R_D = 0$ . Найденную выше ординату  $1.333$  соединяем с нулевой ординатой под точкой  $E$ .

При положении  $\bar{P}=1$  на основной балке  $AB$  балка  $BCD$  не работает,  $R_C = 0$ , соответствующий участок  $A'B'$  линии влияния совпадает с осью абсцисс (рис.3,в).

Далее построим линию влияния изгибающего момента  $M_K$  в сечении  $K$ . Будем, как и выше рассматривать в начале передвижение груза  $\bar{P}=1$  по той балке, к которой принадлежит рассматриваемое сечение. При движении  $\bar{P}=1$  по балке  $BCD$  второстепенная балка  $DE$  не работает. Следовательно, участок  $B'K'C'D'$  имеет тот же вид (рис.3, д), что и линия влияния  $M_K$ , изображенная на рис. 1. При движении  $\bar{P}=1$  по  $DE$ , усилие  $R'_D$ , передаваемое на балку  $BCD$ , меняется по линейному закону, что и определяет участок  $D'E'$ , линия влияния  $M_K$ . При положении  $\bar{P}=1$  на основной балке  $AB$ , нагрузка на вышележащие этажи не передается и сечение  $K$  ни каких усилий не испытывает, соответствующий участок линии влияния совпадает с осевой линией. Рассуждая аналогично, строим линия влияния  $Q_K$ .

Таким образом, порядок построения линия влияния какой-либо опорной реакции или усилия в каком-либо поперечном сечении многопролетной шарнирной балки следующий:

- 1) Строится линия влияния в пределах того элемента балки, к которому принадлежит данная опора или данное поперечное сечение, как для отдельно стоящей балки (рис.1);
- 2) полученная крайняя ордината на консоли, на которую опирается одна из опор соседнего второстепенного элемента балки, соединяется с нулевой точкой над другой опорой этого элемента. Аналогичное построение проводится и на участках следующих еще более высоко расположенных элементов балки;
- 3) под основными элементами балки, (расположенными ниже рассматриваемого), проводится линия, совпадающая с осью линии влияния;
- 4) характерные ординаты определяются из подобия треугольников, полученных на линии влияния.

В заключение отметим, что очертание линии влияния совершенно не зависит от того, какая нагрузка действует на балку, где она расположена, да и существует ли она вообще. Линия влияния представляет собой некоторую характеристику балки, подобную другим характеристикам: пролету, сечению и т.д.

Определим теперь усилия от заданной нагрузки (рис.3, в) с помощью построенных линий влияния. Для этого воспользуемся формулой (1).

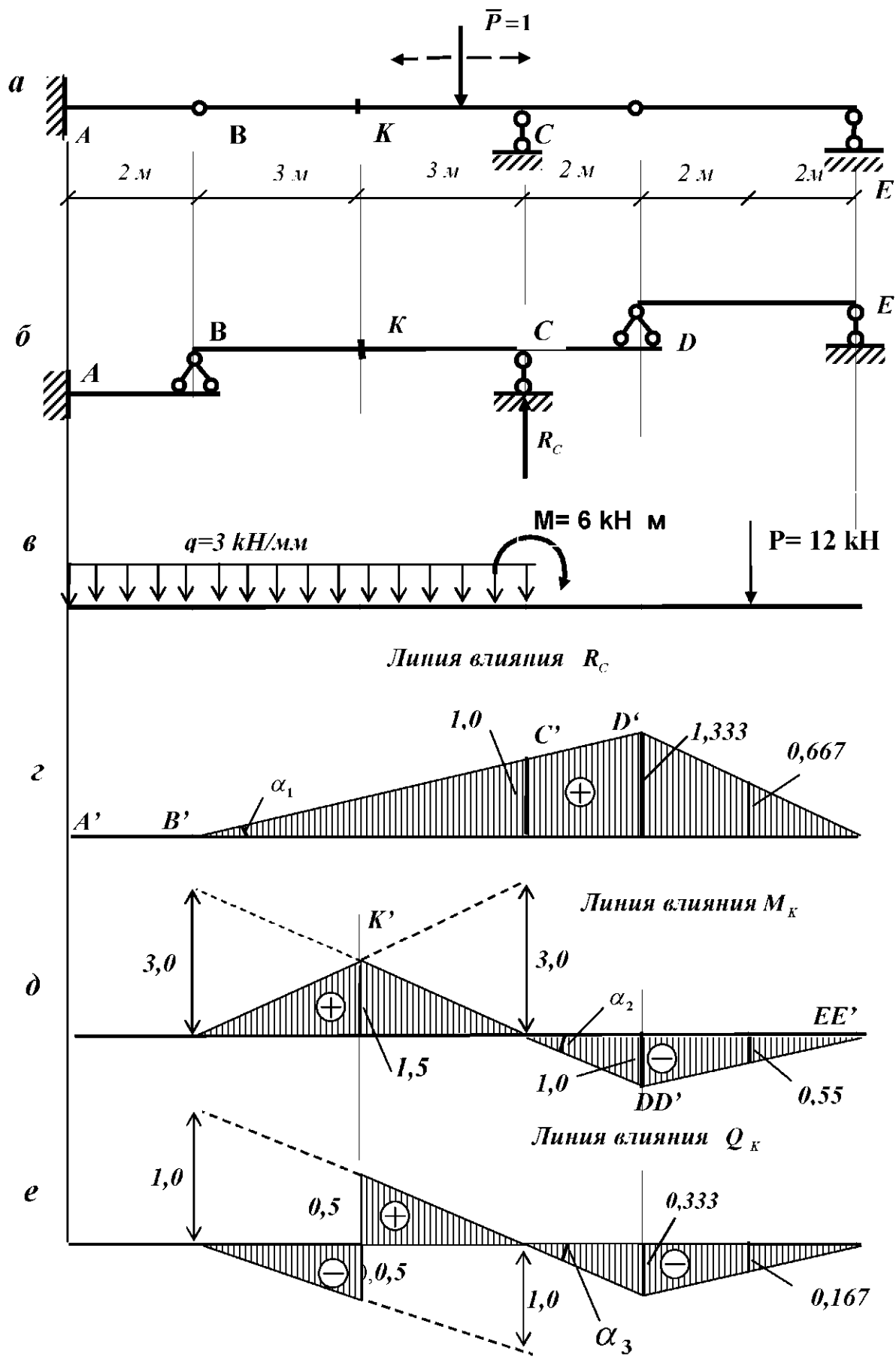


Рис. 3

а) Опорная реакция  $R_C$ . Вычисляем: площадь участка  $B'C'$ , находящегося под распределенной нагрузкой -  $\omega_1 = (1 \times 6) / 2 = 3$ , тангенс угла наклона участка линии влияния  $R_C$  в точке приложения сосредоточенного момента  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1 / 6 = 0.167$ , и ординату на линии влияния, расположенную под силой -  $y_1 = 0.667$ . Тогда

$$R_C = P \times 0.667 + q \times 3 + M \times 0.167 = 12 \times 0.667 + 3 \times 3 + 6 \times 0.167 = 18.00 \text{ kH}.$$

б) Изгибающий момент в сечении  $K$ . Площадь участка  $B'K'C'$ , находящегося под распределенной нагрузкой  $\omega_2 = (1.5 \times 6) / 2 = 4.5$ , тангенс угла наклона участка линия влияния в точке приложения сосредоточенного момента  $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1 / 6 = -0.167$ , ордината на линии влияния, расположенная под силой  $y_2 = -0.5$ . Тогда

$$M_K = 12 \times (-0.5) + 3 \times 4.5 + 6 \times (-0.167) = 6.498 \text{ kH}$$

в) Поперечная сила в сечении  $K$ . Вычислив  $\omega_3$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_3$  и  $y_3$ , получим

$$Q_R = 12 \times (-0.167) + 3 \times (0) + 6 \times (-0.167) = -3.006 \text{ kH}.$$

Сравнивая результаты, полученные по линиям влияния со значениями, найденными при построении эпюр, видим, что они совпадают.

## 2. Расчет простой плоской статически определимой фермы

*Задача.* Для фермы, показанной на рис.4 требуется

- а) определить (аналитически) усилия в стержнях третьей панели;
- б) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- в) по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

*Решение.* Расчет фермы следует начинать с определения опорных реакций. Поскольку ферма и нагрузка симметричны, то  $R_A = R_B = 5 \times P / 2 = 5 \times 12 / 2 = 30 \text{ kH}$ .

Для определения усилий в стержнях фермы применяют метод сечений. Желательно так вести вычисления, что бы усилия в каждом стержне определялось независимо от усилий в других стержнях. Это избавляет от нарастания погрешности и увеличивает точность расчета. Для этого следует придерживаться следующего порядка:

- а) Провести разрез фермы, который должен проходить не больше чем через три стержня, в том числе и через стержень, усилие в котором требуется определить.
- б) Отбросив левую или правую часть фермы (удобнее отбрасывать ту часть фермы, к которой приложено больше нагрузок).
- в) Заменить действие отброшенной части фермы действием неизвестных усилий в разрезанных стержнях; при этом усилия всегда предполагаются растягивающими.
- г) Составить такое уравнение статики, чтобы только искомое усилие входило в него как неизвестное.
- д) Решить уравнение и найти это усилие; если результат будет со знаком плюс, то стержень растянут, если со знаком минус, то стержень сжат.

**Усилие  $N_{46}$ .** Проведем разрез  $n-n$  и отбросим правую часть фермы. Для того, чтобы в уравнение для  $N_{46}$  не вошли усилия  $N_{56}$  и  $N_{57}$  следует записать сумму моментов всех сил, приложенных к оставшейся части фермы, относительно узла  $5$ , в котором пересекаются эти усилия. Такая точка называется **моментной**. Эта точка всегда находится на пересечении двух других стержней попавших в разрез.



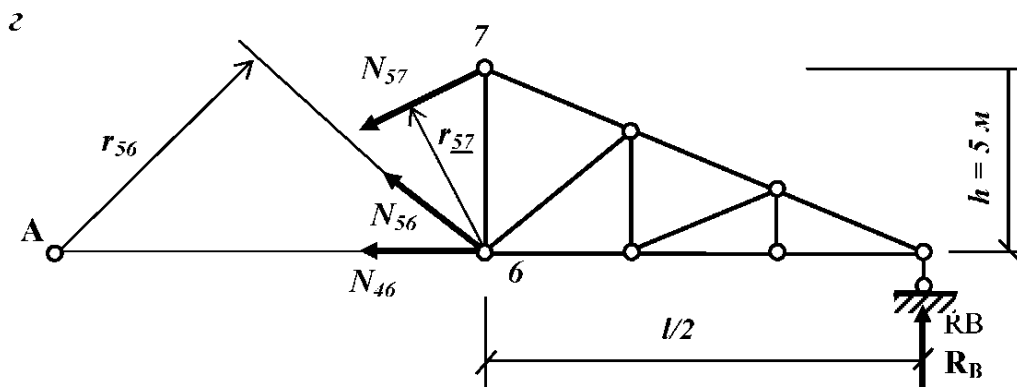
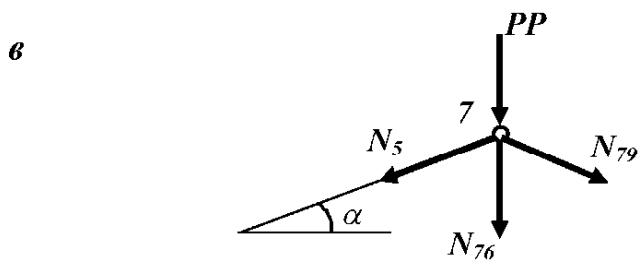
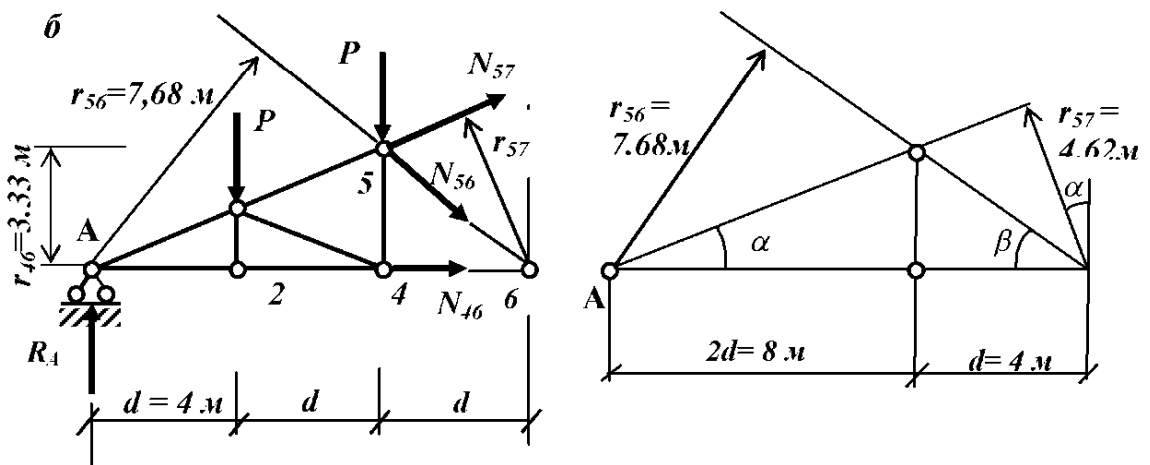
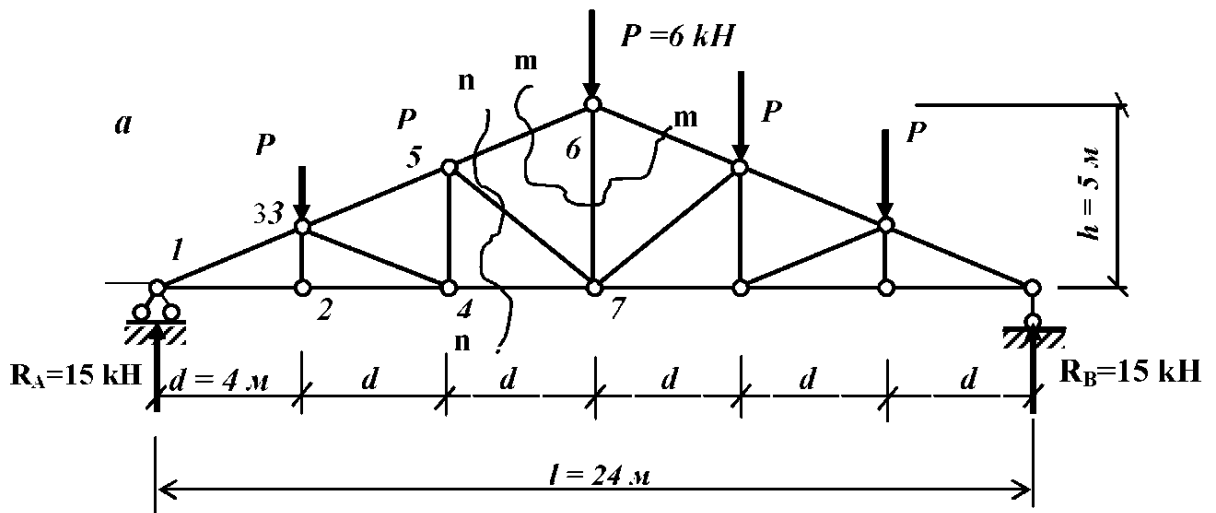


Рис. 4

$$\sum M_5 = 0; \quad N_{46} \cdot r_{46} - R_A \cdot 2d + P \cdot d = 0;$$

Откуда  $N_{46} = (R_A \cdot 2 - P \cdot 1) \cdot d / r_{46} = (15 \cdot 2 - 6 \cdot 1) \cdot 4 / 3,333 = 28,80 \text{ kH}$

**Усилие  $N_{57}$ .** Для нахождения  $N_{57}$  воспользуемся тем же разрезом  $n-n$  (рис.4,б), но теперь моментная точка будет на пересечении  $N_{56}$  и  $N_{46}$  в узле 6.

$$\sum M_6 = 0; \quad -N_{57} \cdot r_{57} - R_A \cdot 3d + P \cdot 2d + P \cdot d = 0;$$

Откуда  $N_{57} = d \cdot (-R_A \cdot 3 + P \cdot 2 + P) / r_{57} = 4 \cdot (-15 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 6) / 4,62 = -23,40 \text{ kH}$ .

**Усилие  $N_{56}$ .** Для определения  $N_{57}$  вновь воспользуемся тем же разрезом  $n-n$  (рис.4, б). Но теперь моментная точка будет на пересечении  $N_{57}$  и  $N_{46}$  в узле 1.

Проводя из этого узла перпендикуляр на линию действия искомого усилия (рис.4,в) получим его плечо относительно узла 1.

$$\sum M_1 = 0; \quad -N_{56} \cdot r_{56} - P \cdot d - P \cdot 2d = 0;$$

Тогда

$$N_{56} = -3P \cdot d / r_{56} = -3 \cdot 6 \cdot 4 / 7,68 = -9,375 \text{ kH};$$

**Усилие  $N_{67}$ .** Для нахождения  $N_{67}$  воспользуемся разрезом  $m-m$  (рис.4, г).

Рассмотрим равновесие узла 7.

$$\sum X = 0; \quad -N_{57} \cos \alpha + N_{79} \cos \alpha = 0; \text{ следовательно, } N_{79} = N_{57};$$

$$\sum Y = 0; \quad -P - N_{67} - 2 \cdot N_{57} \sin \alpha = 0;$$

Откуда  $N_{67} = -2 \cdot \sin \alpha \cdot N_{57} - P = -2 \cdot 0,385 \cdot (-23,40) - 6 = +12,00 \text{ kH};$

б) Построение линий влияния начинаем с построения линий влияния опорных реакций.

**Опорные реакции** в балочной ферме определяются также как для однопролетной балки. Поэтому линии влияния этих реакций не отличаются от линий влияния опорных реакций балок (рис.1).

**Линия влияния усилия  $N_{46}$ .** Воспользуемся разрезом  $n-n$  (рис 4,а).

Рассмотрим два положения единичного груза: справа и слева от разрезанной панели. При положении груза  $\bar{P} = 1$  справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4,б) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 5:

$$\sum M_5^{лево} = 0; \quad N_{46} \cdot r_{46} - R_A \cdot 2d = 0;$$

откуда  $N_{46} = (2d / r_{46}) \cdot R_A = (2 \cdot 4 / 3,33) R_A = 2,40 \cdot R_A$ .

Получено аналитическое выражение правой ветви линии влияния  $N_{46}$ .

Это усилие меняется по закону изменения левой опорной реакции  $R_A$ , все значения которой умножены на 2,40. Строим правую ветвь линии влияния  $N_{46}$ , откладывая на левой опорной вертикали ординату 2,40 и соединяя ее с нулевой точкой на правой опорной вертикали. Полученную правую прямую используем на участке движения груза справа от разрезанной панели.

При положении груза слева от разрезанной панели составляем условие равновесие правой отсеченной части (рис.4, д)

$$\sum M_5^{право} = 0; \text{ или } N_{46} \cdot r_{46} - R_B \cdot 4d = 0;$$

откуда  $N_{46} = (4d / r_{46}) \cdot R_B = (4 \cdot 4 / 3,33) \cdot R_B = 4,80 \cdot R_B$ .

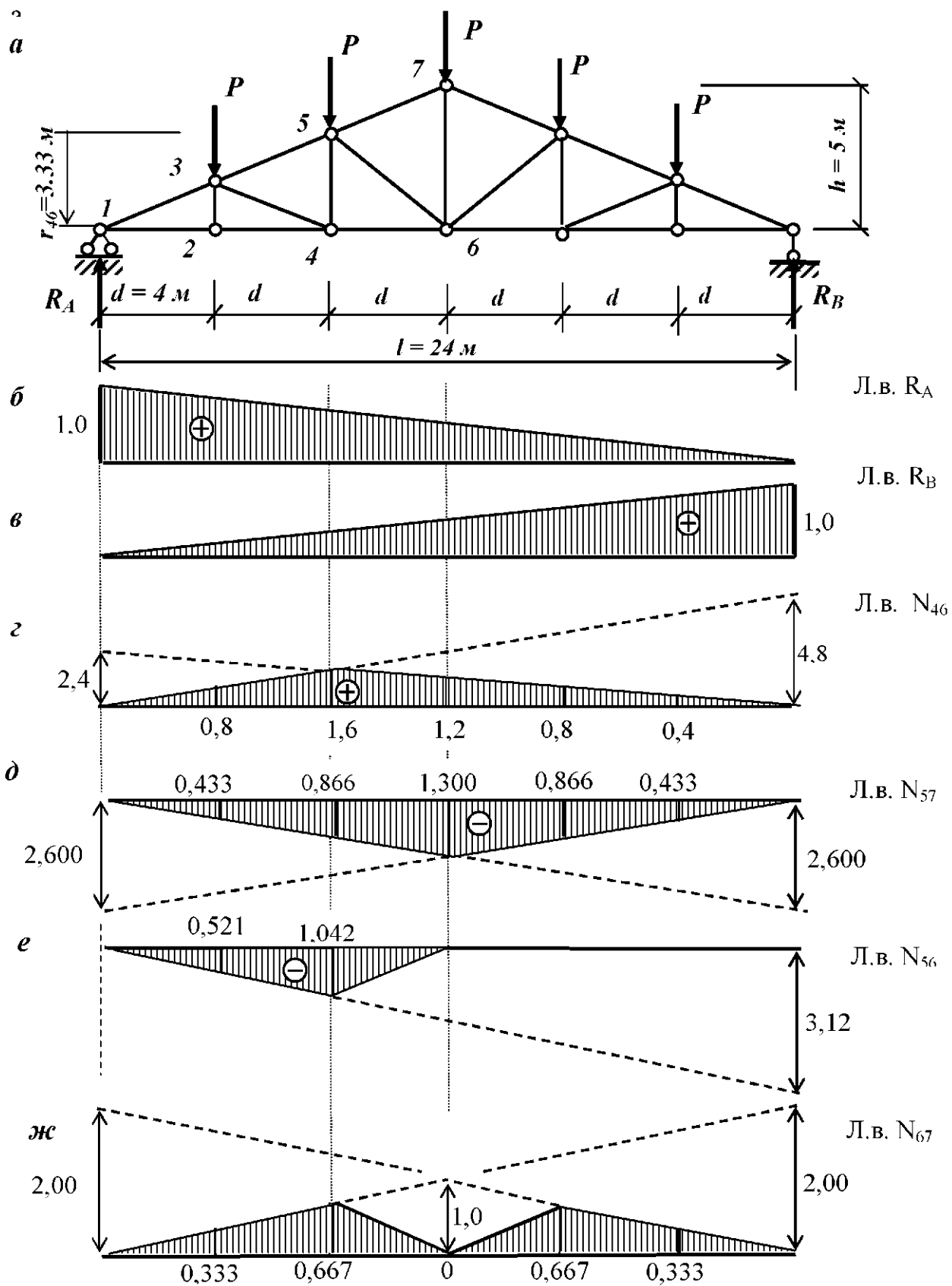


Рис.5

Усилие  $N_{46}$  меняется по закону изменения правой реакции, все ординаты которой увеличены в 4,8 раза. Поэтому левую ветвь линии влияния строим в виде прямой, имеющей на правой опорной вертикали ординату 4.80, а на левой опорной вертикали – нулевую точку.

При положении груза  $\bar{P} = 1$  в пределах разрезанной панели линией влияния будет прямая, соединяющая крайние ординаты.  $\bar{P} = 1$

Линия влияния усилия  $N_{57}$ . Вновь воспользуемся разрезом  $n-n$  (рис 4,а).

Рассмотрим два положения единичного груза: справа и слева от разрезанной панели. При нахождении груза  $\bar{P} = 1$  справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4,б) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 6:

$$\sum M_6^{лев} = 0; \quad -N_{57} \cdot r_{57} - R_A \cdot 3d = 0;$$

$$\text{откуда } N_{57} = -(3d/r_{57}) \cdot R_A = -(3 \cdot 4/4,62)R_A = -2,60 \cdot R_A.$$

Получено аналитическое выражение правой ветви линии влияния  $N_{57}$ .

Это усилие меняется по закону изменения левой опорной реакции  $R_A$ , все значения которой умножены на  $-2,60$ . Строим правую ветвь линии влияния  $N_{57}$ , откладывая на левой опорной вертикали вниз от оси линии влияния ординату  $2,60$  и соединяя ее с нулевой точкой на правой опорной вертикали. Построенная таким образом правую ветвь используем на участке движения груза справа от разрезанной панели.

При положении груза слева от разрезанной панели составляем условие равновесие правой отсеченной части (рис.4, д)

$$\sum M_6^{прав} = 0; \quad \text{или } -N_{57} \cdot r_{57} - R_B \cdot 3d = 0;$$

$$\text{откуда } N_{57} = -(3d/r_{57}) \cdot R_B = -(3 \cdot 4/4,62) \cdot R_B = -2,60 \cdot R_B.$$

Левую ветвь линии влияния строим в виде прямой, имеющей на правой опорной вертикали вниз ординату 2.60, а на левой опорной вертикали – нулевую точку.

В пределах разрезанной панели соединяем крайние ординаты прямой линией.

Отметим, что в рассмотренных двух линиях влияния правая и левая ветви линии влияния пересеклись под моментными точками. Это не случайно и вытекает из их построения. Эту зависимость будем использовать в дальнейшем для проверки правильности построения линий влияния.

Линия влияния усилия  $N_{56}$ . Воспользуемся разрезом  $n-n$  (рис 4,а). При положении груза  $\bar{P} = 1$  справа от разреза рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4,б) и составляем сумму моментов относительно моментной точки – узла 1:

$$\sum M_1^{лев} = 0; \quad -N_{56} \cdot r_{56} = 0;$$

откуда  $N_{56} = 0$ , то есть при грузе  $\bar{P} = 1$ , расположенном справа от разреза, усилие  $N_{56}$  равно нулю. Правая прямая линии влияния в этом случае сливается с осью абсцисс.

Для построения левой прямой линии влияния рассмотрим условие равновесия правой отсеченной части фермы (рис.4, д).

$$\sum M_1^{прав} = 0; \quad \text{или } N_{56} \cdot r_{56} + R_B \cdot l = 0;$$

$$\text{откуда } N_{56} = -(l/r_{56}) \cdot R_B = -(24/4.62) \cdot R_B = -3.125 \cdot R_B.$$

Для построения левой прямой линии влияния  $N_{56}$  рассмотрим равновесие правой части фермы (при грузе  $\bar{P} = 1$ , расположенном слева от разреза  $n-n$ ):

$$\sum M_1^{права} = 0; \text{ или } + N_{56} \cdot r_{56} + R_B \cdot l = 0;$$

$$\text{откуда } N_{56} = -(l/r_{56}) \cdot R_B = -(24/7.68) \cdot R_B = -3.125 \cdot R_B,$$

т.е. усилие  $N_{56}$  равно правой опорной реакции  $R_B$ , умноженной на (-3,125).

Для построения графика этой зависимости откладываем правой опорной вертикали вниз отрезок 3,125 и соединяем его конец с нулевой точкой на правой опорной вертикали. В пределах разрезанной панели соединяем крайние точки левой и правой ветвей передаточной прямой. Построенная таким образом линия влияния  $N_{56}$  изображена на рис. 5,е. Отметим, что вновь правая и левая ветви линии влияния пересеклись под моментной точкой - узлом 1.

**Линия влияния усилия  $N_{67}$ .** Вырежем узел 7 (рис.4. г) и спроектируем действующие на этот узел силы на горизонтальную ось

$$\sum X = 0; \quad -N_{57} \cos \alpha + N_{79} \cos \alpha = 0; \quad (a)$$

$$\text{следовательно, } N_{79} = N_{57}.$$

Спроектируем те же силы на вертикальную ось

$$\sum Y = 0; \quad -N_{67} - 2 \cdot N_{57} \sin \alpha = 0; \quad (б)$$

$$\text{откуда } N_{67} = -2 \cdot N_{57} \sin \alpha.$$

Таким образом, линия влияния  $N_{67}$  может быть получена умножением всех ординат линии влияния  $N_{57}$  на коэффициент  $(-2 \times \sin \alpha)$ . Линия влияния  $N_{67}$  имеет вид треугольника (рис.5. ж) с наибольшей ординатой (под узлом 7), равной единице.

Если же груз  $\bar{P} = 1$  перемещается по верхнему поясу фермы («езда поверху»), то в тот момент, когда он окажется в узле 7, то уравнение (б) примет вид

$$\sum Y = 0; \quad -P - N_{67} - 2 \cdot N_{57} \sin \alpha = 0;$$

$$\text{откуда } N_{67} = -2 \cdot N_{57} \sin \alpha - P = -2 \cdot N_{57} \sin \alpha - 1.$$

Следовательно, в этом случае ордината на линии влияния  $N_{67}$  под узлом 7 меньше на единицу, чем ордината на этой же линии влияния при езде по нижнему поясу, и равна нулю (сплошная линия на рис. 5. ж).

в) Вычислим по линиям влияния усилия от заданной постоянной нагрузки – сосредоточенных сил  $P = 6kH$ . Уравнение (1) принимает более простой вид

$$N = \sum_1^n F_i y_i = P \sum y_i \dots$$

$$\text{Тогда } N_{46} = 6 \cdot (0.8 + 1.6 + 1.2 + 0.8 + 0.4) = 6 \cdot 4.8 = 28.80kH;$$

$$N_{57} = 6 \cdot (0.433 + 0.866 + 1.300 + 0.866 + 0.433) = 6 \cdot 3.898 = 23.39kH;$$

$$N_{56} = 6 \cdot (-0.521 - 1.042) = 6 \cdot (-1.563) = -9.376kH;$$

$$N_{67} = 6 \cdot (0.333 + 0.667 + 0 + 0.667 + 0.333) = 12.00kH.$$

Найденные с помощью линий влияния усилия в стержнях фермы совпадают с полученными аналитически значениями.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Любое сооружение под действием внешних факторов деформируется, изменяя свою первоначальную форму и принимает форму равновесия, при котором влияние внешних воздействий уравнивается внутренними силами сопротивления. При этом перемещение  $\Delta_{kP}$  произвольной точки  $T$  по заданному направлению  $k-k$  от нагрузки  $P$  может быть вычислено по универсальной формуле Мора, которая для балок и рам имеет вид

$$\Delta_{kP} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_P}{E \cdot J_x} dz.$$

Вычисление интеграла Мора удобно производить с помощью формулы Симпсона – одной из формул численного интегрирования. Определение перемещений с помощью этой формулы производится в следующем порядке:

- 1) Строится эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки - *эпюра  $M_P$* ;
- 2) Выбирается вспомогательное единичное состояние системы. Для этого к сооружению, освобожденному от заданной нагрузки, по направлению искомого перемещения прикладывается единичная сила: при определении линейного перемещения – сосредоточенная сила, при определении угла поворота – момент;
- 3) Строится эпюра изгибающих моментов от действия этой единичной силы – *эпюра  $\bar{M}_k$* ;
- 4) Ось балки (рамы) разбивается на участки таким образом, что бы в пределах участка *эпюры  $\bar{M}_k$  и  $M_P$*  не имели бы особенностей (переломов и скачков);
- 5) На каждом участке вычисляем ординаты обеих эпюр в начале ( $\bar{M}_k^{нач}$ ,  $M_P^{нач}$ ), середине ( $\bar{M}_k^{сред}$ ,  $M_P^{сред}$ ) и в конце участка ( $\bar{M}_k^{кон}$  и  $M_P^{кон}$ ).

Вычислить перемещение по формуле Симпсона:

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EJ} \left[ (\bar{M}_k^{нач}) \cdot (M_P^{нач}) + 4 \cdot (\bar{M}_k^{сред}) \cdot (M_P^{сред}) + (\bar{M}_k^{кон}) \cdot (M_P^{кон}) \right].$$

Правило знаков: произведение ординат положительно, если обе ординаты лежат по одну сторону от оси; если  $\Delta_{kP}$  положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно – то противоположно этому направлению.

**Пример 3. Определить перемещение в статически определимой балке.** Для балки (рис.6,а) определить прогиб (вертикальное перемещение) сечения  $D$ .

*Решение.* Строим эпюру от заданной нагрузки. Так как балка имеет промежуточный шарнир (является составной) строим схему взаимодействия элементов балки (рис.6,б). Расчет начинаем со вспомогательной балки  $BCD$ . Эпюра  $M_P$  показана на рис. 6, в. Выбираем единичное состояние – освободив балку от заданной нагрузки, прикладываем в точке  $D$  сосредоточенную силу  $\bar{P} = 1$ , направленную вертикально вниз. Строим эпюру  $\bar{M}_k$  от единичного воздействия.

воздействия. Для этого вновь используем этажную схему. Эпюра  $\bar{M}_k$  приведена на рис. 6, г.

При построении эпюр, балка разбивалась на три участка:  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , длина которых, соответственно 6, 3 и 6 метров. Таким образом, в формуле Симпсона будет три слагаемых.

$$\Delta_{kp} = \frac{6}{6EJ}(-30 \cdot 12 - 4 \cdot 6 \cdot 6 + 0 \cdot 0) + \frac{3}{6EJ}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 15.75 \cdot 3 + 36 \cdot 6) + \frac{6}{6EJ}(36 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \cdot 3 + 0 \cdot 0) = +\frac{22.5}{EJ}.$$

Знак плюс показывает, что перемещение сечения  $D$  происходит в направлении силы  $\bar{P} = 1$ , то есть вниз.

**Пример 4. Определение перемещений в статически определимой раме.**

**Задание.** Для рамы, показанной на рис. 6,е, требуется определить угол поворота сечения  $B$ . Стержни рамы имеют разное поперечное сечение отношение осевых моментов инерции  $J_1 / J_2 = 2$ .

**Решение.** Определив опорные реакции строим эпюру  $M_q$  от заданной нагрузки. Так как искомое перемещение – угол поворота, прикладываем в сечении  $B$  единичный момент и строим эпюру  $\bar{M}$ . Вычисляем интеграл Мора по формуле Симпсона

$$\varphi_B = \Delta_{iq} = \frac{6}{6EJ_1}(0 \cdot 8 - 4 \cdot 16 \cdot 0.5 + 12 \cdot 1) + \frac{4}{6EJ_2}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{EJ_1}(-20) + \frac{2}{3EJ_2}36 = \frac{1}{E} \left( -\frac{20}{J_1} + \frac{24}{J_2} \right) = \frac{1}{E} \left( \frac{-20}{2J} + \frac{24}{J} \right) = +\frac{14}{EJ}.$$

Поворот сечения произошел по часовой стрелке – в направлении приложенного единичного момента  $\bar{M}$

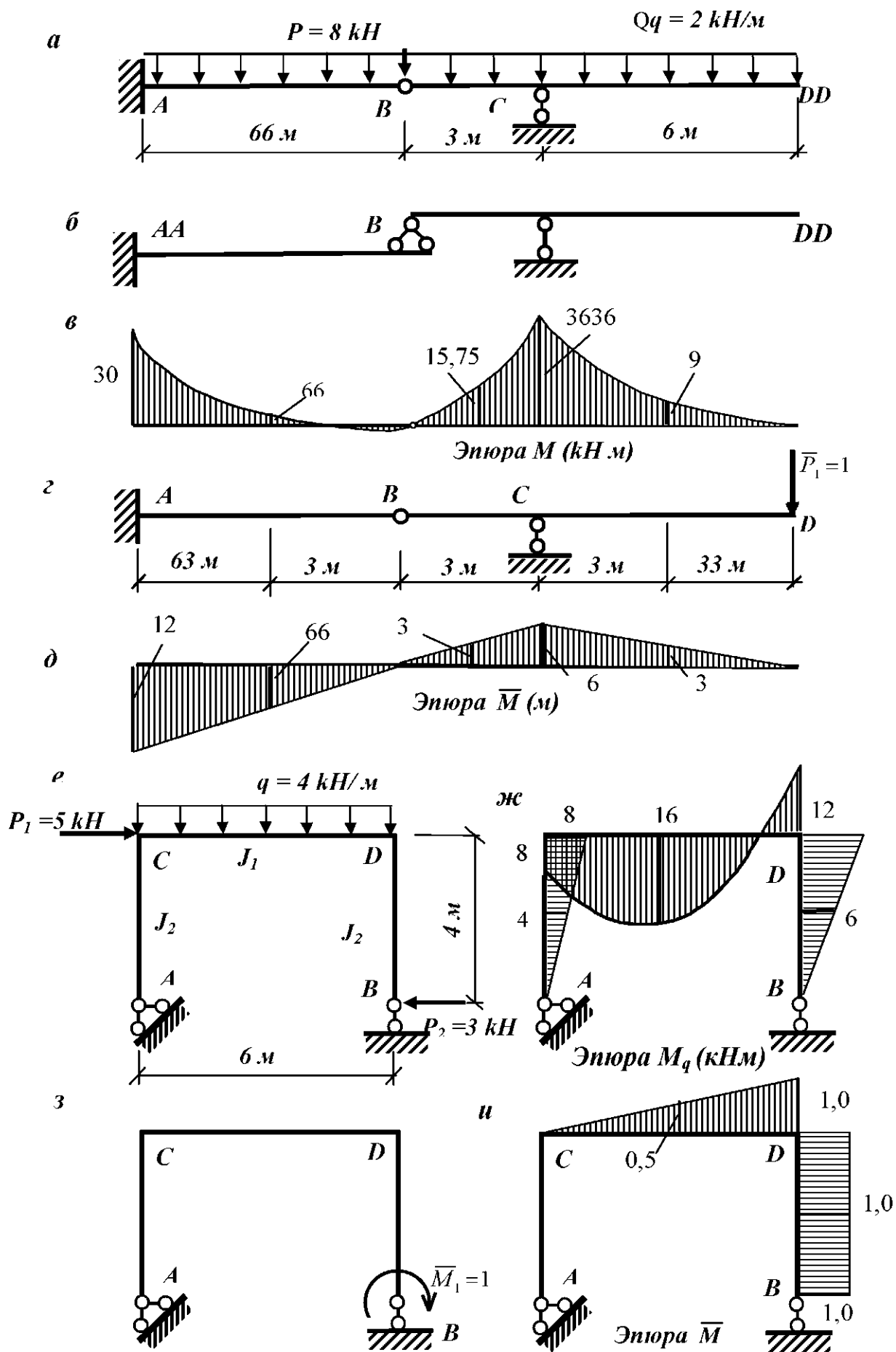


Рис. 6



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. . . . .	3
Расчет многопролетных статически определимых балок . . . . .	3
Пример расчета многопролетной шарнирной балки . . . . .	5
Статически определимые фермы . . . . .	8
Пример расчета простой статически определимой фермы . . . . .	9
Определение перемещений стержневых систем. . . . .	15
Пример определения перемещений в статически определимой балке . . . . .	15
Пример определения перемещений в статически определимой раме . . . . .	17
Литература . . . . .	17